

UNE CARACTÉRISATION DE LA CORRESPONDANCE DE LANGLANDS LOCALE POUR $GL(n)$

PAR GUY HENNIART

RÉSUMÉ. — Soient F un corps commutatif localement compact non archimédien et ψ un caractère non trivial du groupe additif de F . La correspondance de Langlands locale donne, pour chaque entier $n \geq 1$, une bijection $\sigma \mapsto \pi_n(\sigma)$ de l'ensemble $\mathcal{G}_F(n)$ des classes d'isomorphisme de représentations de dimension n du groupe de Weil-Deligne de F sur l'ensemble $\mathcal{A}_F(n)$ des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de $GL_n(F)$. La bijection π_1 est donnée par la théorie locale du corps de classes, et pour $\sigma \in \mathcal{G}_F(n)$, $\sigma' \in \mathcal{G}_F(n')$, on a

$$L(s, \sigma \otimes \sigma') = L(s, \pi_n(\sigma) \times \pi_{n'}(\sigma')),$$
$$\varepsilon(s, \sigma \otimes \sigma', \psi) = \varepsilon(s, \pi_n(\sigma) \times \pi_{n'}(\sigma'), \psi).$$

Nous prouvons que ces propriétés caractérisent la famille d'applications (π_n) .

Texte reçu le 18 septembre 2001, accepté le 13 décembre 2001

GUY HENNIART, Département de Mathématiques et UMR 8628 du CNRS, Université de Paris-Sud, 91405 ORSAY Cedex (France) • *E-mail* : Guy.Henniart@math.u-psud.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 22E50.

Mots clefs. — Corps local, correspondance de Langlands, fonction L , facteur ε .

J'ai écrit le présent article durant un congé pour recherches et conversion thématique accordé par l'Université de Paris-Sud, et alors que je profitais de l'hospitalité généreuse de l'Institute for Advanced Study à Princeton. Je tiens à remercier ces deux institutions.

ABSTRACT (*A characterization of the local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}(n)$*)

Let F be a locally compact non-Archimedean field and ψ a non-trivial additive character of F . The local Langlands correspondence gives for each positive integer n a one-to-one map $\sigma \mapsto \pi_n(\sigma)$ from the set $\mathcal{G}_F(n)$ of isomorphism classes of degree n representations of the Weil-Deligne group of F onto the set $\mathcal{A}_F(n)$ of isomorphism classes of smooth irreducible representations of $\mathrm{GL}_n(F)$. Class-field theory gives the map π_1 and for $\sigma \in \mathcal{G}_F(n)$, $\sigma' \in \mathcal{G}_F(n')$, we have

$$L(s, \sigma \otimes \sigma') = L(s, \pi_n(\sigma) \times \pi_{n'}(\sigma')),$$

$$\varepsilon(s, \sigma \otimes \sigma', \psi) = \varepsilon(s, \pi_n(\sigma) \times \pi_{n'}(\sigma'), \psi).$$

We prove that such properties characterize the family of maps (π_n) .

1. Introduction

1.1. Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien. Fixons un caractère non trivial ψ du groupe additif de F , et une clôture séparable algébrique $\bar{F}$ de F . Nous notons W_F le groupe de Weil de $\bar{F}$ sur F , et W'_F le groupe de Weil-Deligne. Par représentation de W_F ou W'_F , nous entendons représentation complexe Φ -semisimple, de dimension finie (voir [10, § 4]). Pour chaque entier $n \geq 1$, nous notons $\mathcal{G}(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations de dimension n de W'_F , et $\mathcal{G}^0(n)$ le sous-ensemble formé des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de W_F ; nous notons également $\mathcal{A}(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$ et $\mathcal{A}^0(n)$ le sous-ensemble formé des classes de représentations lisses irréductibles supercuspidales.

Pour $n = 1$, la théorie locale du corps de classes donne une bijection $\sigma \mapsto \pi_1(\sigma)$ de $\mathcal{G}(1)$ sur $\mathcal{A}(1)$. Nous normalisons l'application de réciprocité de sorte que les éléments de Frobenius géométriques de W_F correspondent aux uniformisantes de $F^\times$.

Les conjectures de Langlands pour GL_n sur F prédisent l'existence pour chaque entier $n \geq 2$ de bijections naturelles $\sigma \mapsto \pi_1(\sigma)$ de $\mathcal{G}^0(n)$ sur $\mathcal{A}^0(n)$. Ces conjectures sont maintenant prouvées, par Laumon, Rapoport et Stuhler [7] quand F est de caractéristique non nulle, et par Harris et Taylor [2], voir aussi [4], [5], si F est de caractéristique nulle.

On peut caractériser cette famille de bijections — ce qui précise le mot naturel employé plus haut — par la préservation d'invariants, les facteurs L et ε de paires.

1.2. Pour une représentation σ de W'_F , nous notons $L(s, \sigma)$ sa fonction L d'Artin et $\varepsilon(s, \sigma, \psi)$ le facteur local défini par Langlands et Deligne, cf. [10, § 4]. Pour une représentation lisse irréductible π de $\mathrm{GL}_n(F)$ et une représentation lisse irréductible π' de $\mathrm{GL}_{n'}(F)$, nous notons $L(s, \pi \times \pi')$ et $\varepsilon(s, \pi \times \pi', \psi)$ les facteurs définis par Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika [6] ou par Shahidi

(voir [8], [9]). Si q est le cardinal du corps résiduel de F , les facteurs L sont de la forme $P(q^{-s})^{-1}$, où P est un polynôme à coefficients complexes de terme constant égal à 1, tandis que les facteurs ε sont de la forme αq^{-ms} avec $\alpha \in \mathbb{C}^\times$, $m \in \mathbb{Z}$. On note également $\sigma^\vee$ ou $\pi^\vee$ la contragrédiente de σ ou π comme plus haut. On pose aussi

$$\gamma(s, \sigma, \psi) = \varepsilon(s, \sigma, \psi) \frac{L(1-s, \sigma^\vee)}{L(s, \sigma)},$$

et de même pour $\pi \times \pi'$.

REMARQUE. — Ces facteurs L , ε et γ ne dépendent que des classes d'isomorphisme des représentations en question. On peut former le produit tensoriel $\sigma \otimes \sigma' \in \mathcal{G}(nn')$ d'un élément σ de $\mathcal{G}(n)$ par un élément σ' de $\mathcal{G}(n')$ et considérer la contragrédiente $\sigma^\vee \in \mathcal{G}(n)$ (resp. $\pi^\vee \in \mathcal{A}(n)$) d'un élément σ de $\mathcal{G}(n)$ (resp. $\pi \in \mathcal{A}(n)$).

1.3. Les conjectures de Langlands prouvées dans [7], [2], [4], [5] peuvent s'énoncer de la façon suivante.

THÉORÈME. — *Il existe une famille d'applications $(\pi_n^0)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{G}^0(n)$ dans $\mathcal{A}^0(n)$, π_1^0 étant donnée par la théorie locale du corps de classes, qui vérifie les identités suivantes quels que soient les entiers $n, n' \geq 1$ et $\sigma \in \mathcal{G}^0(n)$, $\sigma' \in \mathcal{G}^0(n')$:*

$$\pi_n^0(\sigma^\vee) = \pi_n^0(\sigma)^\vee, \quad \varepsilon(s, \pi_n^0(\sigma) \times \pi_{n'}^0(\sigma'), \psi) = \varepsilon(s, \sigma \otimes \sigma', \psi).$$

Ces applications sont bijectives.

1.4. En fait, la famille d'applications du théorème 1.3 est unique. Cela découle, par récurrence sur l'entier $n \geq 2$, du résultat suivant de l'auteur [3, cor. du th. 1.1].

THÉORÈME. — *Soit n un entier, $n \geq 2$, et soient π, π' des éléments de $\mathcal{A}^0(n)$. Si l'on a*

$$\gamma(s, \pi \times \rho, \psi) = \gamma(s, \pi' \times \rho, \psi)$$

pour $r = 1, \dots, n-1$ et $\rho \in \mathcal{A}^0(r)$, alors $\pi = \pi'$.

REMARQUE. — Pour r, ρ comme dans le théorème, on a (cf. [6, 8.1])

$$L(s, \pi \times \rho) = L(s, \pi^\vee \times \rho^\vee) = 1$$

de sorte que $\gamma(s, \pi \times \rho, \psi) = \varepsilon(s, \pi \times \rho, \psi)$.

Grâce au théorème 1.3, on peut traduire le résultat précédent en termes de représentations galoisiennes.

COROLLAIRE. — Soit n un entier, $n \geq 2$, et soient σ, σ' deux éléments de $\mathcal{G}^0(n)$. Si l'on a

$$\gamma(s, \sigma \otimes \tau, \psi) = \gamma(s, \sigma' \otimes \tau, \psi)$$

pour $r = 1, \dots, n-1$ et $\tau \in \mathcal{G}^0(r)$, alors $\sigma = \sigma'$.

Aucune démonstration directe de ce corollaire n'est connue.

1.5. On sait depuis longtemps, grâce aux classifications de Langlands et Zelevinski, cf. [1], [11], étendre de façon naturelle les bijections précédentes π_n^0 en des bijections π_n de $\mathcal{G}(n)$ sur $\mathcal{A}(n)$. La construction en sera rappelée au § 2, où sera établie également l'assertion suivante.

THÉORÈME. — La famille de bijections $(\pi_n)_{n \geq 0}$ de $\mathcal{G}(n)$ sur $\mathcal{A}(n)$ vérifie :

- (i) $\pi_n(\sigma) = \pi_n^0(\sigma)$ pour $\sigma \in \mathcal{G}^0(n)$;
- (ii) $\pi_n(\sigma^\vee) = \pi_n^0(\sigma)^\vee$ pour $\sigma \in \mathcal{G}^0(n)$;
- (iii) quels que soient les entiers $n, n' \geq 1$ et $\sigma \in \mathcal{G}(n), \sigma' \in \mathcal{G}(n')$, on a

$$\begin{aligned} L(s, \pi_n(\sigma) \times \pi_{n'}(\sigma')) &= L(s, \sigma \otimes \sigma'), \\ \varepsilon(s, \pi_n(\sigma) \times \pi_{n'}(\sigma'), \psi) &= \varepsilon(s, \sigma \otimes \sigma', \psi). \end{aligned}$$

Noter que pour $n = 1$ on a $\mathcal{G}(1) = \mathcal{G}^0(1)$, $\mathcal{A}(1) = \mathcal{A}^0(1)$ et que par conséquent $\pi_1 = \pi_1^0$ est donnée par la théorie locale du corps de classes.

Il est naturel de se demander si les conditions imposées suffisent à assurer l'unicité de la famille d'applications (π_n) . Un tel résultat d'unicité est connu de l'auteur depuis longtemps, avant même que la théorie des facteurs locaux de paires fût établie. Puisque les conjectures de Langlands sont maintenant prouvées, publier la preuve du résultat d'unicité est justifié. C'est ce que propose le présent article, remplissant ainsi une promesse de [5, § 7, propriété 5]. Avec [5, § 3], on dispose maintenant de la totalité de la rédaction prévue lors de [3] (référence [He] dans [3]).

1.6. Nous caractérisons tout d'abord l'image des représentations irréductibles de W_F .

THÉORÈME. — Soit n un entier ≥ 2 , et soient $\sigma \in \mathcal{G}(n)$, $\pi \in \mathcal{A}(n)$.

- (a) Les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (i) $\sigma \in \mathcal{G}^0(n)$;
 - (ii) pour $r = 1, \dots, n-1$ et $\tau \in \mathcal{G}^0(r)$, on a $L(s, \sigma \otimes \tau) = 1$;
 - (iii) pour $r = 1, \dots, n-1$ et $\tau \in \mathcal{G}^0(r)$, $\gamma(s, \sigma \otimes \tau, \psi)$ est un monôme en q^{-s} .
- (b) Les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (i) $\pi \in \mathcal{A}^0(n)$;
 - (ii) pour $r = 1, \dots, n-1$ et $\rho \in \mathcal{A}^0(r)$, on a $L(s, \pi \otimes \rho) = 1$;

- (iii) pour $r = 1, \dots, n-1$ et $\rho \in \mathcal{A}^0(r)$, $\gamma(s, \pi \otimes \rho, \psi)$ est un monôme en q^{-s} .

COROLLAIRE. — Soit $(\tau_n)_{n \geq 1}$ une famille d'applications τ_n de $\mathcal{G}(n)$ dans $\mathcal{A}(n)$ qui vérifie :

- (i) τ_1 est donnée par la théorie locale du corps de classes ;
(ii) quels que soient les entiers $n, n' \geq 1$ et $\sigma \in \mathcal{G}(n)$, $\sigma' \in \mathcal{G}(n')$, on a

$$L(s, \tau_n(\sigma) \times \tau_{n'}(\sigma')) = L(s, \sigma \otimes \sigma'),$$

$$\varepsilon(s, \tau_n(\sigma) \times \tau_{n'}(\sigma'), \psi) = \varepsilon(s, \sigma \otimes \sigma', \psi).$$

Alors pour $\sigma \in \mathcal{G}^0(n)$, on a $\tau_n(\sigma) \in \mathcal{A}^0(n)$ et $\tau_n(\sigma) = \pi_n^0(\sigma)$.

Le corollaire s'établit facilement par récurrence sur l'entier $n \geq 2$ (cf. § 3).

1.7. L'essentiel est ensuite de caractériser l'image de chaque représentation de W'_F dont la restriction à W_F n'est pas irréductible. Il se trouve qu'il suffit de très peu d'information pour ce faire.

Pour tout entier $n \geq 1$, notons $\mathcal{G}^2(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations indécomposables de W'_F , et $\mathcal{A}^2(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_n(F)$. Soient r et n deux entiers ≥ 1 ; pour $\sigma \in \mathcal{G}(n)$, on note $v_r(\sigma)$ l'application de $\mathcal{G}^2(r)$ dans $\mathbb{N}$ qui à $\tau \in \mathcal{G}^2(r)$ associe l'ordre du pôle en $s = 0$ de $L(s, \sigma \otimes \tau)$; pour $\pi \in \mathcal{G}(n)$, on note $v_r(\pi)$ l'application de $\mathcal{A}^2(r)$ dans $\mathbb{N}$ qui à $\rho \in \mathcal{A}^2(r)$ associe l'ordre du pôle en $s = 0$ de $L(s, \pi \times \rho)$.

THÉORÈME. — Soit n un entier ≥ 2 , et soient $\sigma \in \mathcal{G}(n) - \mathcal{G}^0(n)$, $\sigma' \in \mathcal{G}(n)$, $\pi \in \mathcal{A}(n) - \mathcal{A}^0(n)$, $\pi' \in \mathcal{A}(n)$.

- (a) Supposons que pour $r = 1, \dots, n-1$, on ait $v_r(\sigma) = v_r(\sigma')$. Alors $\sigma = \sigma'$.
(b) Supposons que pour $r = 1, \dots, n-1$, on ait $v_r(\pi) = v_r(\pi')$. Alors $\pi = \pi'$.

En fait la méthode de démonstration du théorème permet de reconstituer σ ou π à partir des fonctions $v_r(\sigma)$ (ou $v_r(\pi)$). Voir le § 4.

1.8. Notre résultat principal découle facilement du théorème 1.7 (§ 4.5 et sq.)

THÉORÈME. — Soit $(\tau_n)_{n \geq 1}$ une famille d'applications de $\mathcal{G}(n)$ dans $\mathcal{A}(n)$ qui vérifie :

- (i) $\tau_n(\sigma) = \pi_n^0(\sigma)$ pour $\sigma \in \mathcal{G}^0(n)$, $n \geq 1$;
(ii) quels que soient les entiers r, n vérifiant $1 \leq r < n$, et quels que soient $\sigma \in \mathcal{G}(n) - \mathcal{G}^0(n)$, $\tau \in \mathcal{G}^2(r)$, on a

$$L(s, \tau_n(\sigma) \times \tau_r(\tau)) = L(s, \sigma \otimes \tau).$$

Alors on a $\tau_n = \pi_n$ pour tout entier $n \geq 1$.