

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

PROPRIÉTÉS DE MÉLANGE DU FLOT DES CHAMBRES DE WEYL DES GROUPES DE PING-PONG

Xavier Thirion

**Tome 137
Fascicule 3**

2009

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 387-421

PROPRIÉTÉS DE MÉLANGE DU FLOT DES CHAMBRES DE WEYL DES GROUPES DE PING-PONG

PAR XAVIER THIRION

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous étudions le flot des chambres de Weyl d'une large classe de sous-groupe discrets d'un groupe de Lie semi-simple réel : les groupes de Ping-Pong. Nous montrons que ce flot est mélangeant relativement à la mesure de Patterson-Sullivan ; celle-ci étant infinie en rang ≥ 2 , nous précisons cette propriété de mélange en explicitant sa vitesse dans le direction du vecteur de croissance du groupe.

ABSTRACT (*Mixing properties of Weyl Chamber flows of Ping-Pong groups*)

In this paper, we study the Weyl's chamber flow associated with a large class of discrete subgroups of a semi-simple real Lie group : the Ping-Pong groups. We prove that this flow is mixing with respect to the Patterson-Sullivan measure ; this measure being infinite in rank ≥ 2 , we precise this mixing property with a precise speed of convergence in the direction of the growth vector of the group.

1. Introduction

Soit G un groupe de Lie linéaire réel, connexe et semi-simple de rang $rg(G)$ dont l'espace symétrique associé (X, d_X) est de type non compact.

Dans le cas où G désigne le groupe orthochrone $SO_o(1, n)$, l'espace symétrique associé est l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ et les groupes de Ping-Pong ont été

Texte reçu le 18 janvier 2009, révisé le 21 octobre 2008, accepté le 4 décembre 2008

XAVIER THIRION, Département de Mathématiques, Institut Galilée, Université Paris 13, 99, avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 – Villetaneuse • E-mail : xthirion@math.univ-paris13.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 22E40; 53C35.

Mots clefs. — Lie groups, discrete subgroups, higher rank.

introduits et étudiés par F. Dal'bo et M. Peigné [7]. Dans le cadre plus large où nous nous plaçons, ils représentent une généralisation des groupes de Schottky utilisés par Y. Benoist [5] et fournissent une classe maniable de sous-groupes discrets et Zariski denses de G . Par exemple si G désigne $SO_o(1, n)$ et Γ un groupe de Ping-Pong au sens de [7], le flot géodésique de $\Gamma \backslash \mathbb{H}^n$ possède un codage explicite.

Dans cet article, nous étendons la définition de groupe de Ping-Pong et nous étudions les propriétés des mesures de Patterson-Sullivan associées suivant la généralisation aux espaces symétriques de rang supérieur proposée par P. Albuquerque [1].

Afin d'énoncer les principaux résultats de ce travail, introduisons quelques notations. Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G et soit K un sous-groupe compact maximal. On choisit une chambre de Weyl ouverte $\mathfrak{a}^{++}$ et on note $\mathfrak{a}^+$ l'adhérence de $\mathfrak{a}^{++}$ dans $\mathfrak{a}$. On dispose alors de la décomposition $G = K \exp(\mathfrak{a}^+) K$ et de la projection de Cartan $\mu : G \rightarrow \mathfrak{a}^+$ associée. On munit $\mathfrak{a}$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ telle que, pour tout $g \in G$, on a $d_X(o, g \cdot o) = \|\mu(g)\|$ et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé à $\|\cdot\|$.

On fixe un groupe de Ping-Pong Γ (nous renvoyons le lecteur à la section 6.1 pour une description précise de ces groupes) et on note $(\mathcal{W}_\Gamma, (w_\Gamma^\alpha / \alpha \in \mathfrak{a}))$ le flot des chambres de Weyl de Γ .

Nous nous intéressons ensuite aux propriétés ergodiques des mesures de Patterson-Sullivan. Pour ce faire, nous renvoyons le lecteur aux sections 4 et 7.0.0.1 où nous rappelons la définition du vecteur de croissance et la construction des mesures de Patterson-Sullivan.

Nous avons le

THÉOREME 1.1. — *Il existe une mesure de Patterson-Sullivan m_Γ sur $\mathcal{W}_\Gamma$ telle que, pour toutes fonctions $\psi_1, \psi_2 : \mathcal{W}_\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ continues à support compact, la fonction*

$$\mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \langle \alpha, \tau(\Gamma) \rangle^{\frac{rg(X)-1}{2}} m_\Gamma(\psi_1 \circ w_\Gamma^\alpha \times \psi_2)$$

soit bornée. De plus, il existe $c > 0$ et un endomorphisme S sur $\mathfrak{a}$ symétrique et défini positif tels que, pour tout $\alpha \in \mathfrak{a}$ et toutes fonctions $\psi_1, \psi_2 : \mathcal{W}_\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ continues à support compact, on ait

$$t^{\frac{rg(X)-1}{2}} m_\Gamma(\psi_1 \circ w_\Gamma^{t\tau(\Gamma) + \sqrt{t}\alpha} \times \psi_2) \rightarrow c e^{-\frac{\|\alpha\|^2 \|\tau(\Gamma)\|^2 - \langle \alpha, \tau(\Gamma) \rangle^2}{\|\tau(\Gamma)\|^2}} m_\Gamma(\psi_1) m_\Gamma(\psi_2)$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Lorsque le rang géométrique de X vaut 1, le flot des chambres de Weyl s'identifie avec le flot géodésique de $\Gamma \backslash X$. Ainsi, dans ce contexte, la mesure

de Patterson-Sullivan est finie et le dernier résultat exprime le fait que le flot géodésique est mélangeant par rapport à la mesure de Patterson-Sullivan.

La propriété importante des groupes de Ping-Pong que nous utilisons ici est que leur ensemble limite peut être codé à l'aide d'un alphabet dénombrable. La restriction du flot des chambres de Weyl à un borélien « convenable » est alors semi-conjugue à un flot spécial au dessus d'une transformation dilatante possédant une infinité dénombrable de branches inverses. Ce qui nous permet d'adapter notre étude aux travaux de Y. Guivarc'h et J. Hardy [10] en utilisant le théorème du renouvellement pour les chaînes semi-markoviennes dû à M. Babillot [2].

Pour l'élaboration de ce travail, j'ai bénéficié des remarques et suggestions de Marc Peigné. Je tiens ici à l'en remercier.

2. Notations

Dans cette section, nous fixons quelques notations que nous utiliserons tout au long de ce texte.

Notations relatives à la structure de groupe de Lie de G . — On note $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ l'algèbre de Lie de G , Ad la représentation adjointe de G sur $\mathfrak{g}$ et $\exp$ l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ sur G .

Involution de Cartan et décomposition de Cartan. — Soit Θ une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan associée : $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} / \Theta(X) = X\}$ et $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} / \Theta(X) = -X\}$. On fixe un sous-espace abélien maximal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{p}$. On note A le sous-groupe de G dont $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie.

Racines, chambres de Weyl. — On note R l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$; c'est-à-dire, l'ensemble des formes linéaires non nulles χ sur $\mathfrak{a}$ tel que le sous-espace

$$\mathfrak{g}_\chi := \{X \in \mathfrak{g} / \forall Y \in \mathfrak{a}, [X, Y] = \chi(Y) X\}$$

soit non nul. Chacune des racines de $\mathfrak{a}$ s'annule sur un hyperplan de $\mathfrak{a}$. On appelle *chambres de Weyl* de $\mathfrak{a}$ les composantes connexes de $\mathfrak{a}$ privé de ces hyperplans. On fixe une de ces chambres de Weyl notée $\mathfrak{a}^{++}$. On note $\mathfrak{a}^+$ l'adhérence de $\mathfrak{a}^{++}$ dans $\mathfrak{a}$.

Sous-groupe compact maximal. — On note K le sous-groupe de G dont $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie. C'est un sous-groupe compact maximal de G .

Composante de Cartan. — Pour tout $g \in G$, il existe un unique élément $\mu(g) \in \mathfrak{a}^+$, appelé composante de Cartan de g , tel que $\exp(\mu(g)) \in K g K$. L'application $\mu : G \rightarrow \mathfrak{a}^+$ ainsi définie est appelée *projection de Cartan*.

Norme euclidienne sur $\mathfrak{a}$. — La projection de Cartan permet de munir $\mathfrak{a}$ d'une norme euclidienne $\|\cdot\|$ provenant de la métrique riemannienne de X telle que, pour tout $g \in G$, on ait $d_X(o, g \cdot o) = \|\mu(g)\|$.

Involution d'opposition. — On note ι l'unique involution, dite *d'opposition*, de $\mathfrak{a}$ telle que, pour tout $g \in G$, on ait $\iota(\mu(g)) = \mu(g^{-1})$.

Racines positives et simples. — Une racine $\chi \in R$ est dite positive si elle est positive sur $\mathfrak{a}^+$. On note R^+ l'ensemble des racines positives et on pose

$$\mathfrak{n} := \sum_{\chi \in R^+} \mathfrak{g}_\chi.$$

On note N le sous-groupe connexe de G dont $\mathfrak{n}$ est l'algèbre de Lie. Une racine positive est dite simple si elle ne peut s'écrire comme la somme de deux racines positives. On note Δ l'ensemble des racines simples.

Décomposition d'Iwasawa. — Pour tout $g \in G$, il existe un unique $(k, \alpha, n) \in K \times \mathfrak{a} \times N$ tel que $g = k \exp(\alpha) n$. De plus, l'application

$$K \times \mathfrak{a} \times N \rightarrow G \quad (k, \alpha, n) \mapsto k \exp(\alpha) n$$

est un difféomorphisme de classe C^∞ , appelé *décomposition d'Iwasawa*.

Centralisateur de A dans K et sous groupe parabolique minimal. — On note M le centralisateur de A dans K et on pose $P = MAN$. Le groupe $M A$ normalise N donc P est un sous-groupe de G .

Composante de Jordan. — Tout élément $g \in G$ admet une décomposition unique, appelée décomposition de Jordan, $g = g_e g_h g_u$ en produit de trois éléments qui commutent, avec g_e elliptique (c'est-à-dire semi-simple et contenu dans un sous-groupe compact de G), g_h hyperbolique (c'est-à-dire conjugué à un élément $\exp(a(g))$ avec $a(g) \in \mathfrak{a}^+$) et g_u unipotent. On note $\lambda(g) = a(g)$.

Exemples. — (1) Explicitons certains de ces objets dans le cas où G désigne le groupe orthochrone $SO_o(1, n)$, c'est-à-dire la composante connexe de l'identité dans le sous-groupe de $GL(n+1, \mathbb{R})$ formé des matrices $g \in GL(n+1, \mathbb{R})$ telles que $g I_{1,n} {}^t g = I_{1,n}$, où

$$I_{1,n} = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & -1 \end{pmatrix}.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est l'ensemble des matrices carrées X d'ordre $n+1$ telles que ${}^t X I_{1,n} + I_{1,n} X = 0$.