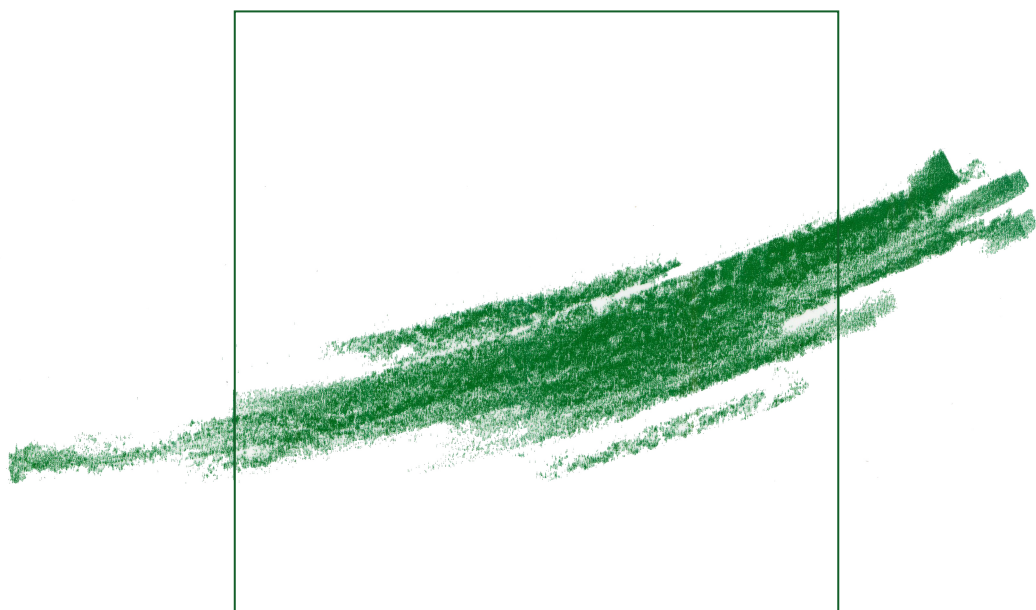


C O U R S   S P É C I A L I S É S  
C O L L E C T I O N   S M F

# Variétés algébriques réelles

Frédéric MANGOLTE



24

Épreuve SMF July 12, 2017

# VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES RÉELLES

Frédéric Mangolte

Épreuve SMF July 2, 2017

### *Comité de rédaction*

Antoine CHAMBERT-LOIR  
Julie DÉSERTI

Bertrand MAURY

Grégory MIERMONT (Directeur)

### *Diffusion*

Maison de la SMF  
Case 916 - Luminy  
13288 Marseille Cedex 9  
France  
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency  
O-131, The Shopping Mall  
Arjun Marg, DLF Phase 1  
Gurgaon 122002, Haryana  
Inde

AMS  
P.O. Box 6248  
Providence RI 02940  
USA  
www.ams.org

EDP Sciences  
17, avenue du Hoggar  
91944 les Ulis Cedex A  
France  
www.epdsciences.com

### *Tarifs*

*Vente au numéro* : 60 € (\$ 90)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat : Nathalie Christiaën*

Cours Spécialisés

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2017

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 1284-6090

ISBN 978-2-85629-822-0

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

# VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES RÉELLES

Frédéric Mangolte

Épreuve SMF July 12, 2017

À mes enfants Gustave Mangolte et Jeanne Mangolte

Épreuve SMF July 12, 2017



## TABLE DES MATIÈRES

|                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Introduction – modèles algébriques des variétés lisses</b> .....                           | 1   |
| Remerciements .....                                                                           | 6   |
| <b>1. Variétés algébriques</b> .....                                                          | 7   |
| 1.1. Variétés algébriques : points ou spectres? .....                                         | 7   |
| 1.2. Ensembles algébriques affines et projectifs .....                                        | 9   |
| 1.3. Variétés algébriques abstraites .....                                                    | 30  |
| 1.4. Topologie euclidienne .....                                                              | 41  |
| 1.5. Dimension, points non singuliers .....                                                   | 44  |
| 1.6. Courbes planes .....                                                                     | 57  |
| 1.7. Parapluies .....                                                                         | 62  |
| Solution des exercices du chapitre 1 .....                                                    | 66  |
| <b>2. <math>\mathbf{R}</math>-variétés</b> .....                                              | 75  |
| 2.1. Structures réelles sur une variété complexe .....                                        | 76  |
| 2.2. $\mathbf{R}$ -variétés et variétés algébriques réelles .....                             | 88  |
| 2.3. Complexification d'une variété réelle .....                                              | 98  |
| 2.4. $\mathbf{R}$ -variétés vs variétés algébriques réelles vs schémas sur $\mathbf{R}$ ..... | 105 |
| 2.5. Faisceaux cohérents et fibrés algébriques .....                                          | 108 |
| 2.6. Diviseurs sur une $\mathbf{R}$ -variété projective .....                                 | 113 |
| 2.7. $\mathbf{R}$ -courbes planes .....                                                       | 127 |
| Solution des exercices du chapitre 2 .....                                                    | 132 |
| <b>3. Topologie des variétés avec involution</b> .....                                        | 137 |
| 3.1. Homologie et cohomologie des $\mathbf{R}$ -variétés .....                                | 138 |
| 3.2. Théorie de Smith .....                                                                   | 145 |
| 3.3. Majoration des nombres de Betti .....                                                    | 149 |
| 3.4. Forme d'intersection sur une $\mathbf{R}$ -variété de dimension paire .....              | 155 |
| 3.5. Classification des $\mathbf{R}$ -courbes et VI <sup>e</sup> problème de Hilbert .....    | 164 |
| 3.6. Variétés Galois-Maximales .....                                                          | 170 |
| 3.7. Cycles algébriques .....                                                                 | 178 |
| Solution des exercices du chapitre 3 .....                                                    | 187 |
| <b>4. Surfaces</b> .....                                                                      | 189 |
| 4.1. Courbes et diviseurs sur les surfaces complexes .....                                    | 191 |
| 4.2. Exemples de $\mathbf{R}$ -surfaces .....                                                 | 203 |

|                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.3. <b>R-surfaces minimales</b> .....                                         | 210 |
| 4.4. Surfaces rationnelles, uniréglées ( $\kappa = -\infty$ ) .....            | 218 |
| 4.5. Surfaces K3, d'Enriques, abéliennes, bielliptiques ( $\kappa = 0$ ) ..... | 241 |
| 4.6. Surfaces elliptiques ( $\kappa \leq 1$ ) .....                            | 254 |
| 4.7. Surfaces de type général ( $\kappa = 2$ ) .....                           | 262 |
| Solution des exercices du chapitre 4 .....                                     | 275 |
| <b>5. Approximations algébriques</b> .....                                     | 277 |
| 5.1. Modèles rationnels .....                                                  | 277 |
| 5.2. Applications lisses et applications régulières .....                      | 278 |
| 5.3. Applications à valeurs dans les sphères .....                             | 284 |
| 5.4. Difféomorphismes et applications birégulières .....                       | 301 |
| 5.5. Faux plans réels .....                                                    | 315 |
| <b>6. Variétés de dimension 3</b> .....                                        | 319 |
| 6.1. La conjecture de Nash de 1952 à 2000 en passant par 1914 .....            | 319 |
| 6.2. Les 3-variétés réelles uniréglées de 2000 à 2012 .....                    | 328 |
| 6.3. Questions et conjectures .....                                            | 334 |
| <b>Appendices</b> .....                                                        | 335 |
| <b>A. Algèbre commutative</b> .....                                            | 337 |
| A.1. Limites inductives .....                                                  | 337 |
| A.2. Anneaux, idéaux premiers, idéaux maximaux, modules .....                  | 338 |
| A.3. Localisation .....                                                        | 340 |
| A.4. Produit tensoriel .....                                                   | 343 |
| A.5. Algèbres entières, théorème des zéros (Nullstellensatz) .....             | 344 |
| A.6. Modules quadratiques sur $\mathbf{Z}$ , réseaux .....                     | 347 |
| A.7. Involutions anti-linéaires .....                                          | 349 |
| Solution des exercices de l'appendice A .....                                  | 351 |
| <b>B. Topologie</b> .....                                                      | 353 |
| B.1. Séparation .....                                                          | 353 |
| B.2. Ensembles semi-algébriques .....                                          | 354 |
| B.3. Complexes simpliciaux, homologie .....                                    | 355 |
| B.4. Théorème des coefficients universels .....                                | 357 |
| B.5. Variétés topologiques et différentielles, orientabilité .....             | 360 |
| B.6. Cohomologie .....                                                         | 364 |
| B.7. Dualité de Poincaré .....                                                 | 366 |
| B.8. Variétés de dimension 3 .....                                             | 373 |
| <b>C. Faisceaux, espaces annelés</b> .....                                     | 379 |
| C.1. Faisceaux .....                                                           | 379 |
| C.2. Espace étalé dans $X$ .....                                               | 381 |
| C.3. Fibres d'un faisceau .....                                                | 382 |
| C.4. Faisceau des sections d'un espace étalé .....                             | 386 |