

Astérisque

JEAN-PIERRE SERRE

Motifs

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 333-349

http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__333_0

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MOTIFS

Jean-Pierre SERRE

1. Introduction

Voici déjà 25 ans que Grothendieck a eu l'idée de la théorie des motifs. Dans l'introduction à "Récoltes et Semailles" ([9], p.xviii), il en dit ceci :

"Parmi toutes les choses mathématiques que j'avais eu le privilège de découvrir et d'amener au jour, cette réalité des motifs m'apparaît encore comme la plus fascinante, la plus chargée de mystère - au coeur même de l'identité profonde entre la "géométrie" et l' "arithmétique". Et le "yoga des motifs" auquel m'a conduit cette réalité longtemps ignorée est peut-être le plus puissant instrument de découverte que j'aie dégagé dans cette première période de ma vie de mathématicien."

Grothendieck lui-même n'a à peu près rien publié¹ sur le "yoga des motifs", à part de brèves allusions dans [7] et [8]. La théorie est restée longtemps confidentielle - tout en étant une source constante d'inspiration dans les questions les plus diverses : structures de Hodge, conjectures de Weil, fonctions L , sommes exponentielles, périodes, etc.

Le présent exposé n'est qu'une introduction. Pour plus de détails, on pourra consulter les textes cités dans la Bibliographie, et notamment [1], [2], [4], [6], [10], [11], [14], [15], [20]. Une Annexe reproduit la première lettre que j'aie reçue de Grothendieck sur les motifs (août 1964), ainsi que deux passages de "Récoltes et Semailles" ([9], 206-207 et 209-211).

¹ Il a fait un séminaire là-dessus à l'IHES en 1967 (cité dans [6]), mais ce séminaire n'a pas été rédigé. Il aurait également aimé en faire le sujet d'une série d'exposés au séminaire Bourbaki, mais il réclamait pour cela un minimum de dix séances ; étant à l'époque responsable du séminaire, j'avais refusé.

2. Méthodes topologiques en géométrie algébrique (groupes de cohomologie)

L'usage de telles méthodes, dans le cas classique où le corps de base est $\mathbf{C}$, remonte à Poincaré, et a été particulièrement développé par Lefschetz, Hodge et bien d'autres. Que cela puisse aussi se faire en caractéristique p a été pressenti par Weil, à la fin des années quarante, lorsqu'il a énoncé les "conjectures de Weil" (cf.[21]) après en avoir démontré le cas particulier de la dimension 1. Une dizaine d'années plus tard, l'introduction par Grothendieck de la *topologie étale* (SGA 4 et SGA 5) a permis de définir des groupes de cohomologie ayant les propriétés voulues.

De façon plus précise, soit X une variété algébrique sur un corps k ; supposons pour simplifier que X soit projective et lisse. Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k , et soit $\bar{X}$ la $\bar{k}$ -variété déduite de X par extension des scalaires de k à $\bar{k}$. Alors, pour tout nombre premier $\ell \neq \text{caract.}k$, les groupes de cohomologie étale $H_{\text{ét}}^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_{\ell})$ sont des $\mathbf{Q}_{\ell}$ -espaces vectoriels de dimension finie ayant toutes les propriétés requises : dualité de Poincaré, formule de Künneth, formule de Lefschetz, etc. De plus, le groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ opère de façon naturelle sur ces espaces, ce qui donne naissance à des représentations ℓ -adiques particulièrement intéressantes, surtout lorsque k est un corps de nombres, cf.[19].

D'autres groupes de cohomologie peuvent être définis. Ainsi, si $\text{caract.}k = 0$, l'hypercohomologie du complexe des formes différentielles fournit des groupes de cohomologie "de de Rham" $H_{DR}^i(X, k)$; ce sont des k -espaces vectoriels filtrés de dimension finie. Si de plus k est plongeable dans $\mathbf{C}$, le choix d'un tel plongement conduit à des groupes de cohomologie "de Betti" $H_B^i(X, \mathbf{Q})$, qui sont des $\mathbf{Q}$ -espaces vectoriels de dimension finie ; leurs produits tensoriels avec $\mathbf{C}$ sont bigradués (structure de Hodge).

Pour X et i fixés, tous ces espaces ont même dimension : le i -ème nombre de Betti de la variété X . Ils sont liés entre eux par des isomorphismes de compatibilité variés ; par exemple, si k est plongé dans $\mathbf{C}$, on a un isomorphisme "de périodes" :

$$H_B^i(X, \mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \simeq H_{DR}^i(X, k) \otimes_k \mathbf{C}.$$

3. Motifs

La situation décrite ci-dessus n'est pas tout à fait satisfaisante. On dispose de trop de groupes de cohomologie qui ne sont pas suffisamment liés entre eux

- malgré les isomorphismes de compatibilité. Par exemple, si X et Y sont deux variétés (projectives, lisses), et $f : H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Q}_\ell) \rightarrow H_{\text{ét}}^i(Y, \mathbf{Q}_\ell)$ une application $\mathbf{Q}_\ell$ -linéaire, où ℓ est un nombre premier fixé, il n'est pas possible en général de déduire de f une application analogue pour la cohomologie ℓ' -adique, où ℓ' est un autre nombre premier. Pourtant, on a le sentiment que c'est possible pour certains f , ceux qui sont "motivés" (par exemple ceux qui proviennent d'un morphisme de Y dans X , ou plus généralement d'une correspondance algébrique entre X et Y). Encore faut-il savoir ce que "motivé" veut dire !

Une façon plus précise de poser cette question est de demander si l'on peut construire une catégorie $\mathbf{Q}$ -abélienne $\underline{M}(k)$ ainsi qu'un foncteur contravariant

$$X \longmapsto h(X) = \bigoplus h^i(X) \quad , \quad h^i(X) \in \text{ob}(\underline{M}(k)),$$

ayant (entre autres) les propriétés suivantes :

- a) Si A et B sont des objets de $\underline{M}(k)$, $\text{Hom}(A, B)$ est un $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel de dimension finie (i.e. les objets de $\underline{M}(k)$ se comportent comme des espaces vectoriels de dimension finie).
- b) Il existe pour tout $\ell \neq \text{caract.} k$ un foncteur

$$T_\ell : \underline{M}(k) \rightarrow G\text{-}\mathbf{Q}_\ell\text{-représentations (où } G = \text{Gal}(\bar{k}/k))$$

tel que $H_{\text{ét}}^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ se déduise de $h^i(X)$ par application du foncteur T_ℓ .

- c) Énoncé analogue à b) pour la cohomologie de de Rham, lorsque $\text{caract.} k = 0$.
- d) Énoncé analogue pour la cohomologie de Betti lorsque k est plongé dans $\mathbf{C}$.

Bref, $h(X)$ devrait jouer le rôle d'une *cohomologie rationnelle* dont les autres cohomologies se déduisent.

Comment définir $\underline{M}(k)$ et le foncteur h ? La première question que l'on se pose est celle-ci : que sont les objets de $\underline{M}(k)$? En fait, ce n'est pas là un point important ; comme Grothendieck nous l'a appris, les objets d'une catégorie ne jouent pas un grand rôle, ce sont les morphismes qui sont essentiels². On peut donc, comme première approximation, définir une catégorie $\underline{M}^0(k)$ dont les

² Exemple élémentaire : si l'on veut construire une catégorie équivalente à celle des k -espaces vectoriels de dimension finie, on peut prendre pour objets les entiers ≥ 0 et définir $\text{Hom}(m, n)$ comme l'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans k ; c'est le point de vue "matriciel" en algèbre linéaire.

objets sont les variétés projectives lisses sur k , et définir h comme le foncteur qui, à une telle variété X , attache X elle-même ; bien sûr, il faut aussi dire ce qu'est $\text{Hom}(X, Y)$ dans la catégorie $\underline{M}^0(k)$, et c'est là le point décisif.

Le premier choix fait par Grothendieck est le suivant (je l'énonce en supposant que toutes les composantes de X ont même dimension - le cas général se ramène à celui-là par additivité) :

$\text{Hom}(X, Y) = \mathbf{Q} \otimes C(X, Y)$, où $C(X, Y)$ est le *groupe des classes de cycles algébriques* de $X \times Y$, de codimension égale à $\dim X$, modulo l'équivalence numérique³.

(Les éléments de $C(X, Y)$ peuvent être vus comme des correspondances algébriques allant de Y vers X : le foncteur h est contravariant.)

La composition des morphismes se définit sans difficulté.

En fait, la construction ci-dessus n'est qu'une première étape dans la définition de la catégorie des motifs. Il est nécessaire d'agrandir $\underline{M}^0(k)$:

- a) En ajoutant (de façon purement formelle) les *noyaux des projecteurs* (un "projecteur" est un élément idempotent d'un $\text{Hom}(X, X)$).

On obtient ainsi la catégorie $\underline{M}^{eff}(k)$ des *motifs effectifs* sur k . Ses objets sont les couples (X, π) , où X est un objet de $\underline{M}^0(k)$ et π un idempotent de $\text{End}(X)$. Cette catégorie est munie de produits tensoriels ; elle a un élément unité 1 qui est $h(X)$ pour X réduit à un point.

- b) En ajoutant (de façon également formelle) l'inverse L^{-1} du motif L défini par $h(\mathbf{P}_1) = 1 \oplus L$ (i.e. $L = h^2(\mathbf{P}_1)$).

Le motif L^{-1} est le *motif de Tate* ; il correspond, du point de vue galoisien, aux caractères cyclotomiques.

Soit $\underline{M}(k)$ la catégorie obtenue après les deux opérations a) et b). C'est la catégorie des motifs cherchée (ou en tout cas l'une de ses incarnations). Si l'on admet les "conjectures standard", cette catégorie est une $\mathbf{Q}$ -catégorie abélienne semi-simple (cf. [6], [11], [14] pour plus de détails) ; c'est même une *catégorie tannakienne*, au sens de [5] et [16] : les produits tensoriels et Hom internes ont toutes les propriétés habituelles. Les foncteurs

$$T_\ell : \underline{M}(k) \rightarrow \mathbf{G}\text{-}\mathbf{Q}_\ell\text{-représentations} \quad (\ell \neq \text{caract. } k)$$

³ A la place de l'équivalence numérique, on pourrait prendre l'équivalence *linéaire*, qui conduit aux groupes de Chow ; cela donne une théorie plus fine, cf. [20].