Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

TISSUS PLATS ET FEUILLETAGES HOMOGÈNES SUR LE PLAN PROJECTIF COMPLEXE

Samir Bedrouni & David Marín

Tome 146
Fascicule 3

2018

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 479-516

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 3, tome 146, septembre 2018

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`commandes@smf.emath.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`http://www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél. : (33) 01 44 27 67 99
`bulletin@smf.emath.fr` • `http://smf.emath.fr`

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

Bull. Soc. Math. France
146 (3), 2018, p. 479-516

TISSUS PLATS ET FEUILLETAGES HOMOGÈNES SUR LE PLAN PROJECTIF COMPLEXE

PAR SAMIR BEDROUNI & DAVID MARÍN

RÉSUMÉ. — Le but de ce travail est d'étudier les feuilletages du plan projectif complexe ayant une transformée de Legendre (tissu dual) plate. Nous établissons quelques critères effectifs de la platitude du d-tissu dual d'un feuilletage homogène de degré d et nous décrivons quelques exemples explicites. Ces résultats nous permettent de montrer qu'à automorphisme de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ près il y a 11 feuilletages homogènes de degré 3 ayant cette propriété. Nous verrons aussi qu'il est possible, sous certaines hypothèses, de ramener l'étude de la platitude du tissu dual d'un feuilletage inhomogène au cadre homogène. Nous obtenons quelques résultats de classification de feuilletages à singularités non-dégénérées et de transformée de Legendre plate.

ABSTRACT (*Flat webs and homogeneous foliations on the complex projective plane*). — The aim of this work is to study the foliations on the complex projective plane with flat Legendre transform (dual web). We establish some effective criteria for the flatness of the dual d-web of a homogeneous foliation of degree d and we describe some explicit examples. These results allow us to show that up to automorphism of $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ there are 11 homogeneous foliations of degree 3 with flat dual web. We will see also that it is possible, under certain assumptions, to bring the study of flatness of the dual web of a general foliation to the homogeneous framework. We get some classification results about foliations with non-degenerate singularities and flat Legendre transform.

Texte reçu le 8 juillet 2016, modifié le 10 mars 2017, accepté le 10 mars 2017.

SAMIR BEDROUNI, Faculté de Mathématiques, USTHB, BP 32, El-Alia, 16111 Bab-Ezzouar, Alger, Algérie • *E-mail :* `sbedrouni@usthb.dz`
DAVID MARÍN, Departament de Matemàtiques Universitat Autònoma de Barcelona E-08193 Bellaterra (Barcelona) Spain • *E-mail :* `davidmp@mat.uab.es`

Classification mathématique par sujets (2010). — 14C21, 32S65, 53A60.

Mots clefs. — Tissu, platitude, transformation de Legendre, feuilletage homogène.

doi:10.24033/bsmf.2764

Introduction

Un d-tissu (régulier) $\mathcal{W}$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$ est la donnée d'une famille $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_d\}$ de feuilletages holomorphes réguliers de $(\mathbb{C}^2, 0)$ deux à deux transverses en l'origine. Le premier résultat significatif dans l'étude des tissus a été obtenu par W. Blaschke et J. Dubourdieu autour des années 1920. Ils ont montré ([3]) que tout 3-tissu régulier $\mathcal{W}$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$ est conjugué, via un isomorphisme analytique de $(\mathbb{C}^2, 0)$, au 3-tissu trivial défini par $\mathrm{d}x.\mathrm{d}y.\mathrm{d}(x+y)$, et cela sous l'hypothèse d'annulation d'une 2-forme différentielle $K(\mathcal{W})$ connue sous le nom de courbure de Blaschke de $\mathcal{W}$. La courbure d'un d-tissu $\mathcal{W}$ avec $d > 3$ se définit comme la somme des courbures de Blaschke des sous-3-tissus de $\mathcal{W}$. Un tissu de courbure nulle est dit plat. Cette notion est utile pour la classification des tissus de rang maximal ; un résultat de N. Mihăileanu montre que la platitude est une condition nécessaire pour la maximalité du rang, voir par exemple [8, 14].

Depuis peu, l'étude des tissus globaux holomorphes définis sur les surfaces complexes a été réactualisée, voir par exemple [6, 12, 9]. Nous nous intéressons dans ce qui suit aux tissus du plan projectif complexe. Un d-tissu (global) sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est donné dans une carte affine (x, y) par une équation différentielle algébrique $F(x, y, y') = 0$, où $F(x, y, p) = \sum_{i=0}^{d} a_i(x, y)p^{d-i} \in \mathbb{C}[x, y, p]$ est un polynôme réduit à coefficient a_0 non identiquement nul. Au voisinage de tout point $z_0 = (x_0, y_0)$ tel que $a_0(x_0, y_0)\Delta(x_0, y_0) \neq 0$, où $\Delta(x, y)$ est le p-discriminant de F, les courbes intégrales de cette équation définissent un d-tissu régulier de $(\mathbb{C}^2, z_0)$.

La courbure d'un tissu $\mathcal{W}$ sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est une 2-forme méromorphe à pôles le long du discriminant $\Delta(\mathcal{W})$. La platitude d'un tissu $\mathcal{W}$ sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ se caractérise par l'holomorphie de sa courbure $K(\mathcal{W})$ le long des points génériques de $\Delta(\mathcal{W})$, voir §1.2.

D. Marín et J. Pereira ont montré, dans [9], comment on peut associer à tout feuilletage $\mathcal{F}$ de degré d sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, un d-tissu sur le plan projectif dual $\check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}$, appelé *transformée de Legendre* de $\mathcal{F}$ et noté $\mathrm{Leg}\mathcal{F}$; les feuilles de $\mathrm{Leg}\mathcal{F}$ sont les droites tangentes aux feuilles de $\mathcal{F}$, voir §1.1.

L'ensemble des feuilletages de degré d sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, noté $\mathbf{F}(d)$, s'identifie à un ouvert de Zariski dans un espace projectif de dimension $(d+2)^2 - 2$ sur lequel agit le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$. Le sous-ensemble $\mathbf{FP}(d)$ de $\mathbf{F}(d)$ formé des $\mathcal{F} \in \mathbf{F}(d)$ tels que $\mathrm{Leg}\mathcal{F}$ soit plat est un fermé de Zariski de $\mathbf{F}(d)$. La classification des feuilletages $\mathcal{F} \in \mathbf{FP}(d)$ modulo $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ reste entière. Le premier cas non trivial que l'on rencontre est celui où $d = 3$; on dispose actuellement d'une caractérisation géométrique ([2, Théorème 4.5]) des éléments de $\mathbf{FP}(3)$, mais ce résultat reste insuffisant pour avancer dans leur classification. C'est dans cette optique que nous nous proposons d'étudier cette question de platitude au niveau des éléments de $\mathbf{F}(d)$ qui sont *homogènes*, i.e. qui sont invariants par homothétie. En fait nous établirons, pour des feuilletages homogènes $\mathcal{H} \in \mathbf{F}(d)$, quelques critères effectifs de l'holomorphie de la courbure de $\mathrm{Leg}\mathcal{H}$; de plus nous verrons (Proposition 6.4) que l'étude de la platitude de la transformée de

Legendre d'un feuilletage inhomogène se ramène, sous certaines hypothèses, au cadre homogène.

Un feuilletage homogène $\mathcal{H}$ de degré d sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est donné, pour un bon choix de coordonnées affines (x,y), par une 1-forme homogène $\omega_d = A_d(x,y)\mathrm{d}x + B_d(x,y)\mathrm{d}y$, où $A_d, B_d \in \mathbb{C}[x,y]_d$ et $\mathrm{pgcd}(A_d, B_d) = 1$.

L'homogénéité de $\mathcal{H}$ implique (voir [9, page 177]) que le discriminant de Leg$\mathcal{H}$ se décompose en produit de $(d-1)(d+2)$ droites comptées avec multiplicités ; certaines parmi elles sont invariantes par Leg$\mathcal{H}$ et d'autres non, i.e. sont transverses. De plus la multiplicité de $\Delta(\mathrm{Leg}\mathcal{H})$ le long d'une droite transverse est comprise entre 1 et $d-1$; en degré 3 elle est donc soit minimale (égale à 1) soit maximale (égale à 2).

Le théorème 3.1 affirme que le d-tissu Leg$\mathcal{H}$ est plat si et seulement si sa courbure est holomorphe sur la partie transverse de $\Delta(\mathrm{Leg}\mathcal{H})$.

Le théorème 3.5 (resp. théorème 3.8) contrôle de façon effective l'holomorphie de la courbure $K(\mathrm{Leg}\mathcal{H})$ le long d'une droite $\ell \subset \Delta(\mathrm{Leg}\mathcal{H})$ non invariante par Leg$\mathcal{H}$ de multiplicité minimale 1 (resp. maximale $d-1$).

Ces théorèmes nous permettront de décrire certains feuilletages homogènes appartenant à $\mathbf{FP}(d)$ pour d arbitraire (Propositions 4.1, 4.2 et 4.3).

En combinant les théorèmes 3.1, 3.5 et 3.8 nous obtenons une caractérisation complète de la platitude de la transformée de Legendre d'un feuilletage homogène de degré 3 (Corollaire 3.10). Ce résultat nous permettra de classifier les éléments de $\mathbf{FP}(3)$ qui sont homogènes : *à automorphisme de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ près, il y a* 11 *feuilletages homogènes de degré* 3 *ayant une transformée de Legendre plate*, voir théorème 5.1.

En se basant essentiellement sur cette classification, nous obtenons un résultat (Théorème 6.1) qui sort du cadre homogène : *tout feuilletage $\mathcal{F} \in \mathbf{FP}(3)$ à singularités non-dégénérées (i.e. ayant pour nombre de Milnor* 1*) est linéairement conjugué au feuilletage de Fermat défini par la* 1*-forme* $(x^3-x)\mathrm{d}y - (y^3-y)\mathrm{d}x$.

Comme application du théorème 6.1 nous donnons une réponse partielle (Corollaire 6.9) à [9, Problème 9.1].

Remerciements. — Ce travail a été soutenu par le Programme National Exceptionnel du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique d'Algérie, et par les projets MTM2011-26674-C02-01 et MTM2015-66165-P du Ministère d'Économie et Compétitivité de l'Espagne. Le premier auteur remercie le Département de Mathématiques de l'UAB pour son séjour. Il remercie également D. Smaï pour ses précieux conseils.