

# **INVERSE PROBLEMS AND IMAGING**

**L. Borcea, H. Kang, H. Liu, G. Uhlmann**

*edited by*

**H. Ammari, J. Garnier**



Panoramas et Synthèses

Numéro 44

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**  
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 44

INVERSE PROBLEMS AND IMAGING

L. Borcea, H. Kang, H. Liu, G. Uhlmann

edited by

H. Ammari, J. Garnier

Société mathématique de France

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

*Habib Ammari*

Department of Mathematics and Applications, Ecole Normale Supérieure, 45 Rue d'Ulm,  
75005 Paris, France

*E-mail* : `habib.ammari@ens.fr`

*Liliana Borcea*

Department of Mathematics, University of Michigan, Ann Arbor

*E-mail* : `borcea@umich.edu`

*Josselin Garnier*

Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires & Laboratoire Jacques-Louis Lions, Uni-  
versité Paris Diderot, 75205 Paris Cedex 13, France

*E-mail* : `garnier@math.univ-paris-diderot.fr`

*Hyeonbae Kang*

Department of Mathematics, Inha University, Incheon 402-751, South Korea

*E-mail* : `hbkang@inha.ac.kr`

*Hongyu Liu*

Department of Mathematics, Hong Kong Baptist University, Kowloon, Hong Kong

*E-mail* : `hongyu.liuip@gmail.com`

*Gunther Uhlmann*

Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, WA 98195, USA and Fon-  
dation des Sciences Mathématiques de Paris

*E-mail* : `gunther@math.washington.edu`

---

**2000 Mathematics Subject Classification.** — 35B30, 35B40, 35J05, 35J47, 35R30, 35R30, 35R60,  
60F05, 76B15, 78M35.

**Key words and phrases.** — Inverse problems, imaging, wave propagation, conductivity, asymp-  
totic analysis, cloaking, random media.

**Mots-clé et phrases.** — Problèmes inverses, imagerie, propagation d'ondes, conductivité, anal-  
yse asymptotique, camouflage, médias aléatoires.

---

## INVERSE PROBLEMS AND IMAGING

**Abstract.** — The workshop “Inverse problems and imaging” took place in Paris at the Institut Henri Poincaré on February 20-22, 2013. It was organized under the auspices of the French Mathematical Society (SMF) as a session of the “États de la recherche”. Its main objective was to present recent developments on inverse problems and imaging. Most of these developments result from interactions between several domains of mathematics: analysis and control of partial differential equations, stochastic analysis, statistics, multi-scale analysis. The three mini-courses given by Liliana Borcea (University of Michigan, USA), Hyeonbae Kang (Inha University, Korea), and Gunther Uhlmann (University of Washington, USA) can be considered as perfect illustrations of these fruitful interactions. Liliana Borcea addresses sensor array imaging in random media, more exactly in randomly perturbed waveguides. She introduces different imaging methods and studies their resolution and stability properties. In his lecture Hyeonbae Kang reviews recent progress on imaging by generalized polarization tensors (GPTs), enhancement of near-cloaking by GPT-vanishing structures, cloaking by anomalous localized resonance, and analysis of stress concentration. He shows how the Neumann-Poincaré operator naturally arises in all these problems. Gunther Uhlmann considers transformation-optics based cloaking in acoustic and electromagnetic scattering. He presents various regularized approximate cloaking schemes.

**Résumé.** — La conférence “problèmes inverses et imagerie” s’est tenue à Paris, à l’Institut Henri Poincaré du 20 au 22 Février 2013. Elle a été organisée sous les auspices de la Société Mathématique de France (SMF) comme une session des “États de la Recherche”. Son principal objectif était de présenter les développements récents sur les problèmes inverses et l’imagerie. La plupart de ces développements résultent d’interactions entre plusieurs domaines des mathématiques : analyse et contrôle des équations aux dérivées partielles, analyse stochastique, statistique, analyse multi-échelles. Les trois mini-cours donnés par Liliana Borcea (Université du Michigan, États-Unis), Hyeonbae Kang (Université Inha, Corée), et Gunther Uhlmann (Université de Washington, États-Unis) peuvent être considérés comme de parfaites illustrations de ces interactions fructueuses. Liliana Borcea a donné un cours sur l’imagerie

en milieux aléatoires, plus exactement sur l'imagerie dans des guides d'ondes aléatoires. Elle propose différentes méthodes d'imagerie et étudie leurs propriétés de résolution et de stabilité. Hyeonbae Kang a présenté les progrès récents sur l'imagerie par tenseurs de polarisation généralisés, la quasi-invisibilité pour des structures à tenseurs de polarisation évanescents, le camouflage (cloaking) par résonance localisée anormale, et l'analyse de la concentration de contraintes. Il montre comment l'opérateur de Neumann-Poincaré se manifeste naturellement dans tous ces problèmes. Gunther Uhlmann a donné un cours sur l'optique de transformation qui rend possible des méthodes de camouflage vis-à-vis des ondes acoustiques et électromagnétiques. Il a présenté différentes méthodes de camouflage approximatif régularisées.

# TABLE DES MATIÈRES

|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Table des matières</b> . . . . .                                                   | v   |
| <b>Résumés des articles</b> . . . . .                                                 | vii |
| <b>Abstracts</b> . . . . .                                                            | ix  |
| <b>Foreword</b> . . . . .                                                             | xi  |
| <br>LILIANA BORCEA — <i>Wave propagation and imaging in random waveguides</i> . . .   | 1   |
| 1. Introduction . . . . .                                                             | 2   |
| 2. Set-up . . . . .                                                                   | 5   |
| 3. Ideal waveguides . . . . .                                                         | 9   |
| 4. Waveguides with random boundaries . . . . .                                        | 13  |
| 5. Waveguides with random internal inhomogeneities . . . . .                          | 28  |
| 6. Net scattering effects . . . . .                                                   | 30  |
| 7. Model of the array data . . . . .                                                  | 41  |
| 8. Time reversal . . . . .                                                            | 42  |
| 9. Imaging . . . . .                                                                  | 49  |
| 10. Numerical results . . . . .                                                       | 57  |
| Acknowledgments . . . . .                                                             | 59  |
| References . . . . .                                                                  | 60  |
| <br>HYEONBAE KANG — <i>Layer potential approaches to interface problems</i> . . . . . | 63  |
| 1. Introduction . . . . .                                                             | 63  |
| 2. Neumann-Poincaré operator . . . . .                                                | 64  |
| 3. Generalized polarization tensors and applications to imaging . . . . .             | 69  |
| 4. Enhancement of cloaking using GPT-vanishing structure . . . . .                    | 83  |
| 5. Analysis of cloaking by anomalous localized resonance . . . . .                    | 88  |
| 6. Analysis of stress concentration . . . . .                                         | 96  |
| Acknowledgement . . . . .                                                             | 103 |
| References . . . . .                                                                  | 104 |

|                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------|-----|
| HONGYU LIU & GUNTHER UHLMANN — <i>Regularized transformation-optics</i> |     |
| <i>cloaking in acoustic and electromagnetic scattering</i> .....        | 111 |
| 1. Introduction .....                                                   | 111 |
| 2. Invisibility for electrostatics .....                                | 113 |
| 3. Wave scattering and invisibility cloaking .....                      | 118 |
| 4. Transformation acoustics and electromagnetics .....                  | 122 |
| 5. Regularized cloaks in acoustic scattering .....                      | 123 |
| 6. Regularized cloaks in electromagnetic scattering .....               | 131 |
| 7. Some open problems .....                                             | 133 |
| Acknowledgement .....                                                   | 134 |
| References .....                                                        | 134 |

## RÉSUMÉS DES ARTICLES

|                      |   |
|----------------------|---|
| LILIANA BORCEA ..... | 1 |
|----------------------|---|

Nous présentons une analyse asymptotique rigoureuse de la propagation des ondes dans des guides d'ondes avec des bords aléatoires et avec des fluctuations aléatoires de la vitesse de propagation. Nous considérons des ondes scalaires en deux et trois dimensions. L'analyse est asymptotique par rapport à la faible amplitude des fluctuations aléatoires, comme il se produit naturellement dans des applications comme l'acoustique sous-marine. Les effets cumulatifs de diffusion dues à ces fluctuations deviennent importants sur de longues distances de propagation. Ils se manifestent par un couplage des modes du guide et une perte de cohérence du champ d'onde. Nous quantifions explicitement le couplage de modes et de la perte de cohérence par l'intermédiaire de trois échelles de longueur importantes : le libre parcours moyen de diffusion, le libre parcours moyen de transport et la distance d'équipartition. La connaissance de ces échelles de longueur est importante pour améliorer les méthodes d'imagerie et pour comprendre leurs limites. Nous étudions un problème d'imagerie de source dans un guide d'ondes aléatoire. Les données sont les signaux enregistrés par un réseau de récepteurs situés loin de la source. Nous considérons un procédé d'imagerie cohérente par migration et nous la comparons avec le processus de retournement temporel. Nous montrons que la diffusion par les inhomogénéités aléatoires est bénéfique en général pour le processus de retournement temporel, mais il détériore toujours l'imagerie. La résolution et la robustesse des images se dégradent au fur et à mesure que la distance entre la source et le réseau de récepteurs augmente. À des distances supérieures au libre parcours moyen de diffusion de l'ensemble des modes, le champ d'ondes est incohérent et l'imagerie ne peut être effectuée par des méthodes d'estimation paramétrique basées sur des modèles de transport d'énergie. Nous analysons en détail la dégradation des images dans des guides d'ondes aléatoires, et illustrons les résultats par des simulations numériques.



|                     |    |
|---------------------|----|
| HYEONBAE KANG ..... | 63 |
|---------------------|----|

Nous passons en revue les progrès récents de l'imagerie par tenseurs de polarisation généralisés (GPTs), la quasi-invisibilité pour des structures à GPTs évanescents, le camouflage (cloaking) par résonance localisée anormale, et l'analyse de la concentration de contraintes. Ces problèmes apparemment sans rapport sont tous des problèmes d'interface, et un opérateur intégral appelé opérateur de Neumann-Poincaré apparaît naturellement dans leur formulation. Nous discutons des bornes, des propriétés d'inversibilité, et des propriétés spectrales de cet opérateur, et nous établissons des liens entre ces propriétés et les problèmes mentionnés ci-dessus.

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| HONGYU LIU & GUNTHER UHLMANN ..... | 111 |
|------------------------------------|-----|

Nous étudions l'optique de transformation qui rend possible des méthodes de camouflage vis-à-vis des ondes acoustiques et électromagnétiques. Les dispositifs pour obtenir un camouflage idéal utilisent des matériaux acoustiques et électromagnétiques singuliers, ce qui pose de graves difficultés à la fois pour leur analyse et pour leur fabrication. Afin d'éviter de telles structures singulières, différentes méthodes de camouflage approximatif régularisées ont été développées. Nous présentons ces développements dans le présent document. Nous soulevons aussi quelques questions ouvertes difficiles pouvant faire l'objet de recherches ultérieures.

## ABSTRACTS

### *Wave propagation and imaging in random waveguides*

LILIANA BORCEA ..... 1

We present a rigorous asymptotic analysis of wave propagation in waveguides with random boundaries and with random fluctuations of the wave speed. We consider scalar waves in both two and three dimensions. The asymptotic analysis is with respect to the small magnitude of the random fluctuations, as they occur naturally in applications like underwater acoustics. Cumulative scattering effects of such fluctuations become significant at long distances of propagation. They couple the waveguide modes and cause loss of coherence of the wave field. We quantify explicitly mode coupling and loss of coherence via three important length scales: the scattering mean free path, the transport mean free path, and the equipartition distance. Knowledge of these scales is important for improving imaging methods and understanding their limitations. We consider a source imaging problem in a random waveguide. The data are the signals recorded by a receiver array far from the source. We study coherent array imaging and contrast it with the time-reversal process. We show that scattering by the random inhomogeneities is beneficial in general for the time reversal process, but it always impedes imaging. The resolution and robustness of the images deteriorate as the waves travel farther in the waveguide from the source to the array. At distances that exceed the scattering mean free path of all the modes, the wave field becomes incoherent and imaging can only be done with parametric estimation methods based on models of transport of energy. We analyze in detail the degradation of images in random waveguides, and illustrate the results with numerical simulations.

### *Layer potential approaches to interface problems*

HYEONBAE KANG ..... 63

We review recent progress on imaging by generalized polarization tensors (GPTs), enhancement of near-cloaking by GPT-vanishing structures, cloaking by anomalous localized resonance, and analysis of stress concentration. These

seemingly unrelated problems are all interface problems, and an integral operator called the Neumann-Poincaré operator naturally arises from them. We discuss about boundedness and invertibility properties, and spectral property of this operator, and then relate these properties with above mentioned problems.

*Regularized transformation-optics cloaking in acoustic and electromagnetic scattering*  
 HONGYU LIU & GUNTHER UHLMANN ..... 111

We consider transformation-optics based cloaking in acoustic and electromagnetic scattering. The blueprints for an ideal cloak use singular acoustic and electromagnetic materials, posing severe difficulties to both theoretical analysis and practical fabrication. In order to avoid the singular structures, various regularized approximate cloaking schemes have been developed. We survey these developments in these lecture notes. We also propose some challenging issues for further investigation.

## FOREWORD

The workshop “Inverse problems and imaging” took place in Paris at the Institut Henri Poincaré on February 20–22, 2013. It was organized under the auspices of the French Mathematical Society (SMF) as a session of the “États de la Recherche”. Its main objective was to present recent developments on inverse problems and imaging. Most of these developments result from interactions between several domains of mathematics: analysis and control of partial differential equations, stochastic analysis, statistics, multi-scale analysis. The three mini-courses given by Liliana Borcea (University of Michigan, USA), Hyeonbae Kang (Inha University, Korea), and Gunther Uhlmann (University of Washington, USA) can be considered as perfect illustrations of these fruitful interactions.

Liliana Borcea’s lecture addresses sensor array imaging in random media. She describes how sensor array imaging has become an important technology with a wide range of applications in underwater acoustics, seismology, non-destructive evaluation of materials, medical ultrasound. She insists on the analogy and differences between coherent wave imaging and physical time reversal for waves and she explains the main challenges in terms of resolution and robustness. In particular she underlines that scattering of the waves by the random inhomogeneities in the medium can be a strong limitation for sensor array imaging, and that techniques to mitigate the effects of random scattering can be efficiently implemented. Her lecture notes give a detailed analysis in the case of imaging in randomly perturbed waveguides. Wave propagation and imaging can then be characterized by a few important length scales and asymptotic analysis based on separation of scales techniques can be applied to motivate and study appropriate imaging functions.

Hyeonbae Kang’s lecture reviews recent progress on imaging by generalized polarization tensors (GPTs), enhancement of near-cloaking by GPT-vanishing structures, cloaking by anomalous localized resonance, and analysis of stress concentration. It turns out that all these problems can be expressed as interface problems in which an integral operator called the Neumann-Poincaré operator arises naturally. The purpose of the lecture notes is to discuss about boundedness, invertibility, and spectral properties of this operator, and then relate these properties with the above mentioned problems.

Gunther Uhlmann's lecture is concerned with invisibility cloaking for acoustic and electromagnetic waves. Cloaking has become an important topic in inverse problems and imaging, as it is a positive way to interpret situations in which imaging is not possible. A region is said to be cloaked if its content together with the cloak is indistinguishable from the background space with respect to exterior wave measurements. In his lecture Gunther Uhlmann considers transformation-optics based cloaking in acoustic and electromagnetic scattering. The blueprints for an ideal cloak use singular acoustic and electromagnetic materials, posing a challenge to both theoretical analysis and practical fabrication. In order to avoid the singular structures, various regularized approximate cloaking schemes have been developed and are presented in the lecture notes.

## WAVE PROPAGATION AND IMAGING IN RANDOM WAVEGUIDES

*by*

Liliana Borcea

---

**Abstract.** – We present a rigorous asymptotic analysis of wave propagation in waveguides with random boundaries and with random fluctuations of the wave speed. We consider scalar waves in both two and three dimensions. The asymptotic analysis is with respect to the small magnitude of the random fluctuations, as they occur naturally in applications like underwater acoustics. Cumulative scattering effects of such fluctuations become significant at long distances of propagation. They couple the waveguide modes and cause loss of coherence of the wave field. We quantify explicitly mode coupling and loss of coherence via three important length scales: the scattering mean free path, the transport mean free path, and the equipartition distance. Knowledge of these scales is important for improving imaging methods and understanding their limitations. We consider a source imaging problem in a random waveguide. The data are the signals recorded by a receiver array far from the source. We study coherent array imaging and contrast it with the time-reversal process. We show that scattering by the random inhomogeneities is beneficial in general for the time reversal process, but it always impedes imaging. The resolution and robustness of the images deteriorate as the waves travel farther in the waveguide from the source to the array. At distances that exceed the scattering mean free path of all the modes, the wave field becomes incoherent and imaging can only be done with parametric estimation methods based on models of transport of energy. We analyze in detail the degradation of images in random waveguides, and illustrate the results with numerical simulations.

**Résumé.** – Nous présentons une analyse asymptotique rigoureuse de la propagation des ondes dans des guides d'ondes avec des bords aléatoires et avec des fluctuations aléatoires de la vitesse de propagation. Nous considérons des ondes scalaires en deux et trois dimensions. L'analyse est asymptotique par rapport à la faible amplitude des fluctuations aléatoires, comme il se produit naturellement dans des applications comme l'acoustique sous-marine. Les effets cumulatifs de diffusion dues à ces fluctuations deviennent importants sur de longues distances de propagation. Ils se manifestent par un couplage des modes du guide et une perte de cohérence du champ d'onde. Nous quantifions explicitement le couplage de modes et de la perte de cohérence par l'intermédiaire de trois échelles de longueur importantes : le libre parcours

---

**2010 Mathematics Subject Classification.** – 76B15, 35R60, 60F05, 35R30.

**Key words and phrases.** – Imaging, wave propagation, random media, asymptotic analysis.

moyen de diffusion, le libre parcours moyen de transport et la distance d'équipartition. La connaissance de ces échelles de longueur est importante pour améliorer les méthodes d'imagerie et pour comprendre leurs limites. Nous étudions un problème d'imagerie de source dans un guide d'ondes aléatoire. Les données sont les signaux enregistrés par un réseau de récepteurs situés loin de la source. Nous considérons un procédé d'imagerie cohérente par migration et nous la comparons avec le processus de retournement temporel. Nous montrons que la diffusion par les inhomogénéités aléatoires est bénéfique en général pour le processus de retournement temporel, mais il détériore toujours l'imagerie. La résolution et la robustesse des images se dégradent au fur et à mesure que la distance entre la source et le réseau de récepteurs augmente. A des distances supérieures au libre parcours moyen de diffusion de l'ensemble des modes, le champ d'ondes est incohérent et l'imagerie ne peut être effectuée par des méthodes d'estimation paramétrique basées sur des modèles de transport d'énergie. Nous analysons en détail la dégradation des images dans des guides d'ondes aléatoires, et illustrons les résultats par des simulations numériques.

## 1. Introduction

Array imaging is an important technology with a wide range of applications in underwater acoustics, seismology, non-destructive evaluation of materials, medical ultrasound, and elsewhere. It is concerned with locating remote, compactly supported sources and/or scatterers from measurements at arrays of sensors. The sensors are devices that transform one form of energy into another. Depending on the application they may be antennas that convert electromagnetic waves to/from electric signals, hydrophones that convert changes in water pressure to electrical signals, ultrasonic transducers that transmit and receive ultrasound waves, and so on. When the sensors are located sufficiently close together, they behave as a collective entity, called the array. The sensors in passive arrays are receivers of the waves generated by unknown remote sources. Active arrays have sensors that play the dual role of sources and receivers. The sources emit waves that propagate through the medium and are scattered back to the array, where they are captured by the receivers.

The recordings at the receivers are called the array data. The coherent imaging process seeks to transform the data into an imaging function that peaks in the support of the unknown sources or scatterers. The key data processing step in the image formation is the synchronization of the received signals using a mathematical model of wave back-propagation from the array to a search (imaging) location  $\vec{\mathbf{r}}_s$ . The expectation is that when  $\vec{\mathbf{r}}_s$  lies in the support of the unknown sources or scatterers, the recordings are synchronized and add up over the sensors to give a peak value of the imaging function. Indeed, this happens if we have an accurate model of wave propagation between the array and the imaging region.

Image formation is somewhat similar to the time reversal process. Time reversal is an experiment that uses an active array to first receive the waves from a remote source, and then re-emit the time-reversed recordings back in the medium. The wave