Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

CLASSIFICATION DES REPRÉSENTATIONS MODULO p DE $\mathrm{SL}(2, F)$

Ramla Abdellatif

Tome 142
Fascicule 3

2014

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 537-589

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 3, tome 142, septembre 2014

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 300 €, hors Europe : 334 € ($ 519)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc Peigné

Bull. Soc. math. France
142 (3), 2014, p. 537–589

CLASSIFICATION DES REPRÉSENTATIONS MODULO p DE $\mathrm{SL}(2, F)$

PAR RAMLA ABDELLATIF

RÉSUMÉ. — Nous étudions les représentations lisses irréductibles modulo p de $\mathrm{SL}(2, F)$, où F est un corps local complet non archimédien de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel fini. En particulier, nous relions ces objets aux représentations modulo p de $\mathrm{GL}(2, F)$ étudiées par Barthel-Livné et Breuil. Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, nous décrivons complètement les représentations dites supersingulières, qui apparaissent par paquets de taille 1 ou 2, et définissons une correspondance de Langlands modulo p pour $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Q}_p)$ qui diffère légèrement mais sensiblement de la correspondance construite par Breuil pour $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}_p)$.

ABSTRACT (*Classification of mod p representations of* $\mathrm{SL}(2, F)$)
We study mod p irreducible smooth representations of $\mathrm{SL}(2, F)$ for F a complete non-archimedean local field of residual characteristic p and with finite residue field. In particular, we link these objects to the mod p representations of $\mathrm{GL}(2, F)$ studied by Barthel-Livné and Breuil. When $F = \mathbb{Q}_p$, we give an explicit description of the so-called supersingular representations, that do appear by packets of size 1 or 2, and we define a mod p Langlands correspondence for $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Q}_p)$ that slightly but significantly differs from the correspondence built by Breuil for $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}_p)$.

Soient p un entier premier et F un corps local non archimédien complet pour une valuation discrète, de caractéristique résiduelle p, d'anneau des entiers $\mathcal{O}_F$ et de corps résiduel fini. Dans les années 90, Barthel et Livné [2, 3] ont classifié les représentations modulo p de $\mathrm{GL}_2(F)$. Ils font ainsi apparaître une nouvelle

Texte reçu le 20 février 2012 et accepté le 3 juillet 2012.

RAMLA ABDELLATIF, UMPA - ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69 034 Lyon Cedex 07 •
E-mail : `ramla.abdellatif@ens-lyon.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11F70, 20C08, 20G05, 22E50.

Mots clefs. — Correspondance de Langlands modulo p, groupe spécial linéaire.

famille de représentations, qu'ils ont appelées représentations *supersingulières* et qui restent en général complètement inconnues. Le seul cas bien compris jusqu'alors est celui de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, où les travaux de Breuil fournissent une description explicite des représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ [5, théorème 1.1] qui mènent à une *correspondance de Langlands locale semi-simple modulo* p [5, définition 4.2.4].

Cet article porte sur les représentations modulo p de $\mathrm{SL}_2(F)$, pour lesquelles nous démontrons des résultats de classification semblables à ceux existants pour $\mathrm{GL}_2(F)$. Cependant, nous verrons qu'apparaissent déjà des différences significatives au niveau de la structure des représentations supersingulières, ce qui isole un peu plus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans la théorie des représentations modulo p des groupes réductifs p-adiques.

Présentation des principaux résultats. — On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_p$ du corps résiduel k_F, un plongement $\iota : k_F \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$ et une uniformisante ϖ_F de F. Nous commençons par donner une description exhaustive des représentations non supercuspidales de $\mathrm{SL}_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On rappelle qu'une représentation lisse irréductible est dite *supercuspidale* lorsqu'elle n'est pas isomorphe à un sous-quotient d'une représentation $\mathrm{Ind}_{B_S}^{\mathrm{SL}_2(F)}(\eta)$ obtenue par induction parabolique d'un caractère lisse $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ du sous-groupe de Borel B_S des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{SL}_2(F)$.

Théorème 0.1. — *Soit $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ un caractère lisse.*

1. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{\mathrm{SL}_2(F)}(\eta)$ est de longueur 2. Il est totalement décomposé si $\eta = \mathbf{1}$ est le caractère trivial, indécomposable sinon.*
2. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{SL}_2(F)]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{\mathrm{SL}_2(F)}(\eta)$ est réductible si et seulement si $\eta = \mathbf{1}$. Dans ce cas, c'est un module indécomposable de longueur 2 admettant le caractère trivial comme sous-objet et la représentation de Steinberg comme quotient.*
3. *Il n'existe pas d'isomorphisme entre sous-quotients d'induites paraboliques provenant de caractères distincts de B_S.*

Nous obtenons en particulier une relation forte entre les représentations lisses irréductibles non supercuspidales de $\mathrm{GL}_2(F)$ et de $\mathrm{SL}_2(F)$, qui reste valable pour les représentations non irréductibles obtenues par induction parabolique.

Théorème 0.2. — *Soit V une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible non supercuspidale de $\mathrm{SL}_2(F)$. A torsion par un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathrm{GL}_2(F)$ près, il existe une unique représentation lisse irréductible non supercuspidale de $\mathrm{GL}_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ dont la restriction à $\mathrm{SL}_2(F)$ est isomorphe à V.*

Pour attraper les autres représentations lisses irréductibles de $\mathrm{SL}_2(F)$, nous suivons les idées développées dans [2] et étudions donc tout d'abord la structure des algèbres de Hecke attachées aux $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles d'un sous-groupe ouvert compact maximal de $\mathrm{SL}_2(F)$. L'action par conjugaison de $\mathrm{SL}_2(F)$ sur l'ensemble de ses sous-groupes ouverts compacts maximaux possède deux orbites respectivement représentées par le sous-groupe $K_0 := \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$ des points $\mathcal{O}_F$-rationnels de SL_2 et par $K_1 := \alpha K_0 \alpha^{-1}$, où $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_F \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathrm{GL}_2(F)$ n'appartenant pas à $\mathrm{SL}_2(F)$. Nous verrons dans la section 3.5 que choisir l'un ou l'autre de ces sous-groupes ne modifie pas les résultats que l'on obtient, ce qui permet de se limiter à l'étude des objets associés à K_0.

Nous démontrons alors le résultat suivant, qui affirme que ces algèbres de Hecke sphériques sont des algèbres de polynômes en une indéterminée (donc sont en particulier commutatives) et que leur action est compatible avec celle des algèbres de Hecke attachées à $\mathrm{GL}_2(F)$ [(1)]. Rappelons ici que, par abus de notation, on note encore $\sigma_{\vec{r}}$ la $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ obtenue par inflation de la représentation $\mathrm{Sym}^{\vec{r}}(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ du groupe fini $\mathrm{GL}_2(k_F)$, puis étendue à $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)Z$ en faisant agir trivialement l'élément central $\varpi_F I_2$.

THÉORÈME 0.3. — *Soient K un sous-groupe ouvert compact maximal de $\mathrm{SL}_2(F)$ et σ une représentation lisse irréductible de K sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

1. *L'algèbre de Hecke attachée au triplet $(\mathrm{SL}_2(F), K, \sigma)$ est une algèbre de polynômes en un opérateur de Hecke τ explicitement déterminé.*
2. *Supposons que $K = K_0$ et que $\sigma = \sigma_{\vec{r}}$ soit la représentation lisse irréductible de K_0 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ obtenue par inflation de la représentation $\mathrm{Sym}^{\vec{r}}(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ du groupe fini $\mathrm{SL}_2(k_F)$. Notons $T_{\vec{r}} \in \mathscr{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_2(F), \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)Z, \sigma_{\vec{r}})$ l'opérateur de Hecke donné dans* [2, proposition 8]*. L'action de l'opérateur τ introduit dans le point précédent est donnée par le carré de l'opérateur $T_{\vec{r}}$:*
$$\forall\ g \in \mathrm{SL}_2(F),\ \forall\ v \in \sigma_{\vec{r}},\ \tau([g,v]) = T_{\vec{r}}^2([g,v]).$$

Nous pouvons ainsi définir des représentations conoyaux indexées par les paires de paramètres $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \ldots, p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$ en posant :
$$\forall\ i \in \{0,1\},\ \pi_i(\vec{r}, \lambda) := \mathrm{Coker}(\tau_{\vec{r}}^i - \lambda)\ ,$$
où $\tau_{\vec{r}}^i$ est l'opérateur de Hecke τ fourni par le théorème 0.3 pour $K = K_i$ et $\sigma = \sigma_{\vec{r}}^{\alpha^i}$. On obtient alors une nouvelle description des représentations non supercuspiales de $\mathrm{SL}_2(F)$ qui est de plus compatible - après application du

[(1)] Le sens précis donné à cette dernière assertion est défini dans la section 3.3.