

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

CYCLE STRUCTURE OF THE INTERCHANGE PROCESS AND REPRESENTATION THEORY

Nathanaël Berestycki & Gady Kozma

**Tome 143
Fascicule 2**

2015

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 265-281

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un
périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 2, tome 143, juin 2015

Comité de rédaction

Gérard BESSON
Emmanuel BREUILLARD
Antoine CHAMBERT-LOIR
Charles FAVRE
Pascal HUBERT
Marc HERZLICH

Daniel HUYBRECHTS
Julien MARCHÉ
Christophe SABOT
Laure SAINT-RAYMOND
Wilhelm SCHLAG

Raphaël KRIKORIAN (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € (\$ 64)

Abonnement Europe : 176 €, hors Europe : 193 € (\$ 290)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2015

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

CYCLE STRUCTURE OF THE INTERCHANGE PROCESS AND REPRESENTATION THEORY

BY NATHANAËL BERESTYCKI & GADY KOZMA

ABSTRACT. — Consider the process of random transpositions on the complete graph K_n . We use representation theory to give an exact, simple formula for the expected number of cycles of size k at time t , in terms of an incomplete Beta function. Using this we show that the expected number of cycles of size k jumps from 0 to its equilibrium value, $1/k$, at the time where the giant component of the associated random graph first exceeds k . Consequently we deduce a new and simple proof of Schramm’s theorem on random transpositions, that giant cycles emerge at the same time as the giant component in the random graph. We also calculate the “window” for this transition and find that it is quite thin. Finally, we give a new proof of a result by the first author and Durrett that the random transposition process exhibits a certain slowdown transition. The proof makes use of a recent formula for the character decomposition of the number of cycles of a given size in a permutation, and the Frobenius formula for the character ratios.

RÉSUMÉ (*Structure des cycles dans le processus de transpositions et théorie des représentations*)

Nous considérons le processus de transpositions aléatoires sur le graphe complet K_n . Nous utilisons la théorie des représentations pour donner une formule exacte et simple pour l’espérance du nombre de cycles de taille k à un temps t , en termes d’une fonction Beta incomplète. À l’aide de cette formule nous montrons que cette

Texte reçu le 22 mai 2012, révisé le 6 mars 2013 et accepté le 17 mai 2013.

NATHANAËL BERESTYCKI

GADY KOZMA, Weizmann Institute.

2010 Mathematics Subject Classification. — 60B15, 60K35, 05E10.

Key words and phrases. — Random transpositions, interchange process, giant component, cycle decomposition, representation theory, slowdown transition, character ratios.

DPMMS, Cambridge University.

N.B. is supported in part by EPSRC grants EP/GO55068/1 and EP/I03372X/1. G.K. is supported in part by the Israel Science Foundation.

quantité saute de 0 à sa valeur d'équilibre au précisément au moment où la composante géante du graphe aléatoire associé devient plus grande que k . Nous en déduisons une nouvelle preuve du résultat de Schramm sur les transpositions aléatoires, qui montre que les cycles géants apparaissent au même moment que la composant géante dans le graphe aléatoire. Nous calculons également la fenêtre de cette transition, qui est particulièrement étroite. Finalement nous obtenons une preuve nouvelle d'un résultat du premier auteur et de Durrett sur la décélération du processus de transpositions. La preuve repose sur une formule récemment établie donnant la décomposition en caractères du nombre de cycles d'une taille donnée dans une permutation, ainsi que la formule de Frobenius pour les rapports de caractères.

1. Introduction and main results

Consider the complete graph K_n on n vertices, and let σ_t be the random walk on S_n that results when considering the interchange process on K_n . That is, σ_t is the usual random transposition process (see e.g. [17]) sped up by a factor $\binom{n}{2}$.

Our first result gives an exact and surprisingly simple formula for the expected number of cycles of size k at time t .

THEOREM 1. — *Fix any $1 \leq k \leq n$ and let $s_k(t)$ be the number of cycles of size k at time t in σ_t . Then*

$$\mathbb{E}(s_k(t)) = \binom{n}{k} \left[\frac{1}{k} x \phi(x) + \int_x^1 \phi(y) dy \right],$$

where $\phi(y) = y^{n-k}(1-y)^{k-1}$ and $x = e^{-tk}$.

This integral is known as the incomplete beta function (the integral from 0 to 1 is the regular beta function). The proof of Theorem 1 is based on representation theory. The key argument is a formula of Gil Alon and one of us [1] for the character decomposition of the number of cycles of a permutation, as well as Frobenius' formula for the values of the character ratios.

Our second result uses the above formula to show that in the limit as $n \rightarrow \infty$, the quantity $\mathbb{E}(s_k(t))$ exhibits a sharp transition from the value 0 to $1/k$ at a time $t_{n,k}$ which is essentially $(-1/k) \log(1-k/n)$, assuming that k is moderately big (of order at least $\sqrt{n}$). We note that this time is an order magnitude smaller than the mixing time for σ_t which (with this parametrization) is $(\log n)/n$ (see [9] or [4]). The width of this transition is shown to be order $1/n^{3/2}$ when k is of order n (which corresponds to a width of order $\sqrt{n}$ in the traditional scaling of random transpositions). This is reminiscent of the cutoff phenomenon for the mixing time, see [9], [15] or [14, §18] for the cutoff phenomenon.

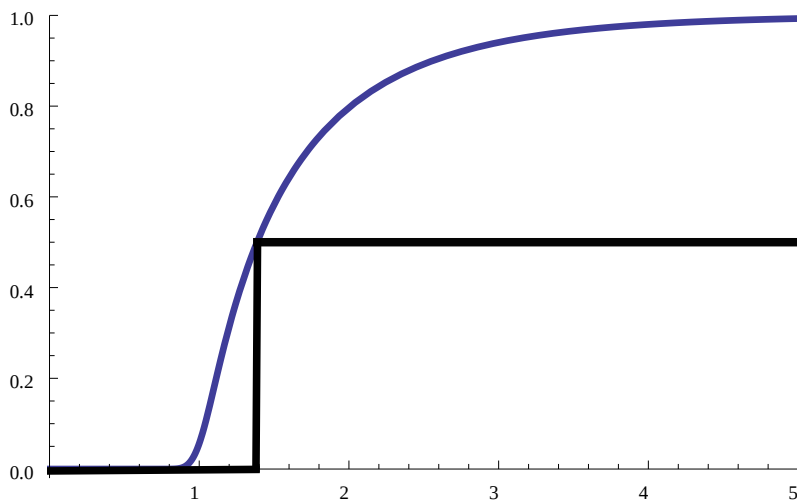


FIGURE 1. Approximate plots of $(n^2/k)\mathbb{E}(s_k(t/n))$, together with the relative size of the giant component, for $n = 200$ and $k = 100$. The scaling factor in front is chosen so that if $k/n \rightarrow \alpha$ then the limiting step function takes the values 0 and α .

THEOREM 2. — *Let $1 \leq k < n$ and let $t_{n,k}$ be the unique t such that $e^{-kt} = (n-k)/(n-1)$. Then*

$$\left| \mathbb{E}(s_k(t)) - \frac{1}{k} \mathbf{1}_{\{t > t_{n,k}\}} \right| \leq Cq \exp \left\{ -c(n-k) \min\{|t - t_{n,k}|^2 k^2, 1\} \right\}$$

where $q = q_n(k)$ is a polynomial factor, $q = n^{3/2}k^{-3/2}(n-k)^{-1/2}$.

(Here and below c and C pertain to unspecified positive universal constants, possibly different from one place to another).

At first sight it might seem as if Theorem 2 cannot possibly hold. After all, a large cycle of σ_t (say of size $\frac{1}{3}n$) is necessarily contained in the giant component of a corresponding Erdős-Rényi graph $G(n, t)$ with edge density t (see e.g. [17]). It is easy to check that $t_{n,k}$ is the first time that the giant component has a relative size which exceeds $1/3$, so it is clear that $\mathbb{E}(s_k(t))$ must be close to 0 before $t_{n,k}$. What Theorem 2 says is that $\mathbb{E}(s_k(t))$ suddenly reaches its equilibrium value precisely at that time, and does not change afterward. Note however that as t increases above $t_{n,k}$, the cluster continues to grow. (See Figure 1). So how come the probability for a cycle of size exactly $\frac{1}{3}n$ does not grow with it? The answer lies in examining a completely random permutation. The expected number of cycles of length k in a random permutation of n elements