

Revue d'Histoire des Mathématiques



*L'inauguration des séries trigonométriques
dans la théorie analytique de la chaleur de Fourier
et dans la controverse des cordes vibrantes*

Alain Herreman

Tome 19 Fascicule 1

2 0 1 3

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

RÉDACTION

Rédacteur en chef :

Norbert Schappacher

Rédacteur en chef adjoint :

Philippe Nabonnand

Membres du Comité de rédaction :

Alain Bernard
Frédéric Brechenmacher
Maarten Bullynck
Sébastien Gandon
Hélène Gispert
Catherine Goldstein
Jens Høyrup
Agathe Keller
Marc Moyon
Karen Parshall
Jeanne Peiffer
Tatiana Roque
Sophie Roux
Dominique Tournès

Directeur de la publication :

Marc Peigné

COMITÉ DE LECTURE

Philippe Abgrall
June Barrow-Greene
Umberto Bottazzini
Jean Pierre Bourguignon
Aldo Brigaglia
Bernard Bru
Jean-Luc Chabert
François Charette
Karine Chemla
Pierre Crépel
François De Gandt
Moritz Epple
Natalia Ermolaëva
Christian Gilain
Jeremy Gray
Tinne Hoff Kjeldsen
Jesper Lützen
Antoni Malet
Irène Passeron
Christine Proust
David Rowe
Ken Saito
S. R. Sarma
Erhard Scholz
Reinhard Siegmund-Schultze
Stephen Stigler
Bernard Vitrac

Secrétariat :

Nathalie Christiaën
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96
Mél : revues@smf.ens.fr / URL : <http://smf.emath.fr/>

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs : Prix public Europe : 80 €; prix public hors Europe : 89 €;
prix au numéro : 43 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
Hindustan Book Agency, O-131, The Shopping Mall, Arjun Marg, DLF
Phase 1, Gurgaon 122002, Haryana, Inde
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

L'INAUGURATION DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES DANS LA *THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR* DE FOURIER ET DANS LA CONTROVERSE DES CORDES VIBRANTES

ALAIN HERREMAN

RÉSUMÉ. — Cet article applique les notions de texte et d'énoncé inaugural à la *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier et à la controverse des cordes vibrantes. Il établit que seul le livre de Fourier est un texte inaugural. Il propose en outre une analyse sémiotique des modes d'expression de la généralité qui permet dans chaque cas de clarifier les conditions d'introduction de la possibilité de représenter une fonction arbitraire par des séries trigonométriques.

ABSTRACT (The inauguration of trigonometrical series in Fourier's *Théorie analytique de la chaleur* and in the vibrating strings controversy)

This paper applies the notions of inaugural text and statement to Fourier's *Théorie analytique de la chaleur* and to the vibrating strings controversy. It establishes that only Fourier's book is an inaugural text. It presents also a semiotic analysis of the expression modes of generality which allows to clarify in both cases the conditions of introducing the possibility to represent an arbitrary function by trigonometrical series.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La possibilité de représenter une fonction quelconque par une série trigonométrique a été envisagée au moins deux fois. Une première fois vers 1750 au cours de la controverse sur les cordes vibrantes qui opposa Daniel Bernoulli, D'Alembert, Euler et ensuite Lagrange. Une deuxième fois, par

Texte reçu le 12 mai 2011, révisé le 14 novembre 2011, accepté le 15 octobre 2012.
A. HERREMAN, Institut de Recherche Mathématique de Rennes (IRMAR).
Courrier électronique : alain.herreman@univ-rennes1.fr

Fourier, plus de cinquante ans plus tard, dans le cadre de sa théorie de la chaleur. Nous voudrions ici étudier ces deux moments en les considérant dans la perspective d'une analyse des conditions d'expression de la généralité en mathématiques¹.

Les énoncés mathématiques (les théorèmes, leurs démonstrations, les définitions, les exemples, les figures, etc.) sont des énoncés la plupart du temps généraux. On peut étudier les moyens par lesquels leur généralité est exprimée ainsi que la manière dont ces moyens ont été historiquement introduits. Les séries trigonométriques en sont un exemple : elles offrent une représentation sinon de toutes les fonctions, tout du moins d'une vaste totalité d'entre elles, grâce à laquelle il est possible d'énoncer des théorèmes généraux. On sait aussi l'importance de cette représentation dans le développement de la théorie des fonctions tout au long du XIX^e siècle. Par ailleurs, la représentation des fonctions par des séries trigonométriques a été introduite en tant que représentation *conforme* des fonctions, c'est-à-dire pouvant représenter *toutes* les fonctions, tout ce qu'elle représente étant une fonction, toutes les propriétés des fonctions pouvant être obtenues à partir d'elle, et toutes ses propriétés étant elles-mêmes des propriétés des fonctions. C'est là une façon à la fois particulière et remarquable d'introduire une nouvelle représentation. On peut, pour les distinguer, appeler *textes inauguraux* les *textes* qui introduisent une telle représentation et qui s'attachent à en soutenir la conformité. On peut aussi distinguer les *énoncés* qui affirment qu'une représentation est conforme à ce qu'elle représente et les appeler des *énoncés inauguraux*. Nous avons montré que *La Géométrie de Descartes* était un texte inaugural qui comprenait plusieurs énoncés inauguraux [Herreman 2012]. Les notions d'énoncés et de textes inauguraux ont ainsi déjà été définies, présentées et discutées à cette occasion. Nous rappellerons ici ces définitions et nous montrerons que *La théorie analytique de la chaleur* de Fourier est aussi un texte inaugural. Nous montrerons en revanche que les textes de la controverse sur les cordes vibrantes ne forment pas un texte inaugural bien qu'ils comprennent l'énoncé inaugural correspondant. Nous esquisserons aussi une analyse des conditions

¹ Je remercie Catherine Goldstein pour ses commentaires et son intérêt pour ce travail ainsi que Olivier Darrigol, Alexandre Guilbaud et Guillaume Jouve qui m'ont fait bénéficier de leurs connaissances sur la controverse des cordes vibrantes.

d'expression de la généralité dans ces deux ensembles de textes. Nous précisons d'abord le rôle des séries trigonométriques dans la généralité de la *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier. Nous déterminerons ensuite inversement les conditions de possibilité sémiotiques de l'introduction de la représentation d'une fonction arbitraire par une série trigonométrique dans le texte de Fourier et lors de la controverse des cordes vibrantes. Nous pourrons ainsi rendre compte, suivant ce point de vue, de l'introduction de la possibilité de représenter une fonction arbitraire par des séries trigonométriques dans les deux cas.

La *Théorie analytique de la chaleur* et la controverse des cordes vibrantes ont déjà fait l'objet d'importants travaux de la part d'historiens des mathématiques et de la physique spécialistes des XVIII^e et XIX^e siècles². Notre propos est ici seulement de les considérer suivant une perspective différente : celle des moyens d'expression de la généralité et des conditions de leur introduction. Nous avons aussi essayé de nous en tenir à ce seul point de vue qui ne saurait bien sûr prétendre se substituer à aucun autre. Il conduit d'ailleurs souvent à des observations qui ont déjà été faites (le cas échéant par les auteurs des textes considérés). Nous avons essayé de l'indiquer toutes les fois où cela nous est apparu et paru justifié. L'intérêt dans ce cas est d'y être arrivé par une autre voie. Il nous a semblé qu'il pouvait aussi dans quelques cas conduire à nuancer d'autres analyses. Nous avons là aussi essayé de l'indiquer.

² Pour une présentation et des commentaires du développement de la théorie de la chaleur de Fourier voir Grattan-Guinness & Ravetz [1972], Herivel [1975], Charbonneau [1976], Friedman [1977], Grattan-Guinness [1990, vol. 2, ch. 9], [2000], [2005a], Dhombres & Robert [1998, p. 443–620]. Parmi les travaux traitant de la controverse des cordes vibrantes on peut citer : Riemann [1854], Burkhardt [1901–1908, p. 10–47 ; trad. fr. in Jouve [2007, II, p. 21–51]], Langer [1947], Truesdell [1960], Ravetz [1961], Grattan-Guinness [1970, p. 2–21] ; Youschkevitch [1976], Lützen [1982, p. 15–24], Darrigol [2007], Jouve [2007, p. 23–25], [2008]. L'édition annotée des mémoires de D'Alembert sur le sujet se trouve dans Jouve [2007]. Sur les problèmes vibratoires avant cette controverse, voir Cannon & Dostrovsky [1981]. Sur D'Alembert et les équations aux différences partielles, voir Guilbaud & Jouve [2009], Demidov [1989] ; [1982].