





**astérisque**

**1973**

**1**

**Trois problèmes  
sur les  
sommes trigonométriques**

**Yves MEYER**

**société mathématique de france**

## Trois problèmes sur les sommes trigonométriques

Yves MEYER<sup>(1)</sup>

---

Classification mathématique par sujets (2010). — 42A16, 42A75, 42B37.

Mots clés. — Somme trigonométrique, fonction presque périodique, vibration, comportement asymptotique, ensemble modèle, nombre de Pisot.

Keywords and phrases. — Trigonometric sum, almost periodic function, vibration, asymptotic behavior, model set, Pisot numbers.

---

---

1. École normale supérieure Paris-Saclay, 61, avenue du Président Wilson 94235 Cachan Cedex.  
Laboratoire CMLA-CNRS/ENS. Email : yves.meyer@cmla.ens-cachan.fr.

## TROIS PROBLÈMES SUR LES SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES

Yves MEYER

**Résumé.** — Les fonctions presque périodiques ont été définies et étudiées par le mathématicien danois Harald Bohr. La motivation de Bohr était la théorie des nombres et l'étude des séries de Dirichlet. Un polynôme trigonométrique en une variable réelle  $x$  est une somme finie

$$S(x) = \sum_1^N c_k \exp(2\pi i \lambda_k x)$$

où les fréquences  $\lambda_k$  sont des nombres réels arbitraires et où les coefficients  $c_k$  sont des nombres réels ou complexes. Une fonction presque périodique au sens de Bohr est la limite uniforme sur  $\mathbb{R}$  d'une suite  $S_m$  de polynômes trigonométriques. Cette définition amène à calculer  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |S(x)| = \|S\|_\infty$  ce qui est souvent difficile. Définissons  $T(\epsilon) > 0$  comme la borne inférieure de l'ensemble des  $|x|$  tels que  $|S(x)| \geq (1 - \epsilon)\|S\|_\infty$ . Estimer  $T(\epsilon)$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$  dépend des propriétés arithmétiques de l'ensemble des fréquences  $\lambda_k$ . Ce petit livre est consacré à ces questions qui sont illustrées sur trois exemples.

**Abstract (Three problems about trigonometric sums).** — Almost periodic functions have been defined and studied by the Danish mathematician Harald Bohr. Bohr's motivations were number theory and Dirichlet series. A trigonometric polynomial  $S(x)$  is a function of the real variable  $x$  defined by

$$S(x) = \sum_1^N c_k \exp(2\pi i \lambda_k x)$$

where the frequencies  $\lambda_k$  are arbitrary real numbers and the coefficients  $c_k$  are real or complex numbers. An almost periodic function in the sense given by Bohr is a uniform limit on  $\mathbb{R}$  of a sequence  $S_m$  of trigonometric polynomials. This definition leads to the computation or estimation of  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |S(x)| = \|S\|_\infty$  which is often a hard problem. Let us define  $T(\epsilon) > 0$  as the lower bound of the set of  $|x|$  such that  $|S(x)| \geq (1 - \epsilon)\|S\|_\infty$ . The estimation of  $T(\epsilon)$  as  $\epsilon \rightarrow 0$  depends on the arithmetical property of the set of frequencies  $\lambda_k$ . This booklet is devoted to these issues which are illustrated on three examples.



## Table des matières

|                                                                                                       |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| INTRODUCTION .....                                                                                    | 1  |
| I. ETUDE ASYMPTOTIQUE DES VIBRATIONS DES SPHERES .....                                                | 2  |
| 1. ....                                                                                               | 2  |
| 2. Démonstration du théorème 1 .....                                                                  | 5  |
| 3. Preuve du théorème 2 .....                                                                         | 8  |
| 4. La théorie $L^2$ .....                                                                             | 10 |
| 5. Applications de la théorie $L^2$ aux vibrations des sphères ....                                   | 15 |
| II. ESPACES DE FONCTIONS PRESQUE-PERIODIQUES QUE L'ON PEUT<br>DEFINIR SUR UN INTERVALLE COMPACT ..... | 18 |
| 6. ....                                                                                               | 18 |
| 7. Une inégalité vérifiée par la densité harmonique .....                                             | 20 |
| 8. La densité presque-périodique d'un ensemble d'entiers .....                                        | 21 |
| 9. Un exemple de calcul de la densité harmonique .....                                                | 22 |
| 10. Démonstration du théorème 6 .....                                                                 | 25 |
| 11. Applications du théorème 6 .....                                                                  | 30 |
| 12. Un théorème sur les nombres de Pisot .....                                                        | 31 |
| 13. Les modèles assez réguliers .....                                                                 | 34 |
| 14. La démonstration du théorème 9 .....                                                              | 42 |
| 15. Un contre-exemple .....                                                                           | 49 |
| III. LES NOMBRES DE PISOT ET LE PROBLEME DE LA SYNTHESE<br>SPECTRALE .....                            | 53 |
| 16. Enoncé du théorème principal .....                                                                | 53 |
| 17. Un problème portant sur un seul opérateur .....                                                   | 57 |
| 18. Le cas où $\theta$ n'est pas un nombre de Pisot .....                                             | 58 |
| 19. Le cas où $\theta$ est un nombre de Pisot : plan de la démonstration                              | 59 |
| 20. Le théorème 11 dans le cadre des modèles assez réguliers .....                                    | 68 |
| 21. La preuve de l'implication (20.7) $\Rightarrow$ (20.8) .....                                      | 70 |
| 22. La preuve de l'implication (20.8) $\Rightarrow$ (20.6) .....                                      | 74 |
| 23. La preuve de l'implication (20.6) $\Rightarrow$ (20.7) .....                                      | 76 |
| 24. La propriété de Bochner .....                                                                     | 76 |
| 25. La preuve du théorème 11 (suite et fin) .....                                                     | 81 |
| BIBLIOGRAPHIE .....                                                                                   | 85 |
| POSTFACE .....                                                                                        | 87 |



## Introduction

Voici trois problèmes sur des espaces de sommes trigonométriques (périodiques ou apériodiques)  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dont les fréquences appartiennent à un ensemble donné de nombres réels.

- Estimer le supremum  $M$  de  $|P(t)|$  lorsque  $-\infty < t < +\infty$ .
- Déterminer combien de temps, à partir de  $0$ , il faudra attendre pour voir  $|P(t)|$  dépasser  $M/2$  (ou  $cM$ ,  $c > 0$ ).
- Approcher les fonctions dont le spectre "continu" est un compact  $E$  (ou une partie de  $E$ ) par des sommes trigonométriques dont les fréquences appartiennent à  $E$ .

Le premier problème est étudié dans la partie I sur l'exemple de la propagation des ondes sur une sphère élastique homogène. Dans la partie II de ce travail, le second problème trouvera quelques éléments de solution.

Enfin le problème de la synthèse spectrale est examiné dans un cas particulier (III).

L'intérêt des exemples choisis me paraît venir de ce que la théorie des nombres y joue un rôle décisif.

## TROIS PROBLÈMES

### I. ETUDE ASYMPTOTIQUE DES VIBRATIONS DES SPHERES

1. Soient  $n \geq 3$  un entier naturel,  $\mathbb{R}^n$  l'espace euclidien  $n$ -dimensionnel,  $M = S^{n-1}$  la sphère  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$  et  $SO(n)$  le groupe orthogonal spécial. On peut munir  $M$  d'une structure riemannienne invariante par l'action de  $SO(n)$  ; La distance géodésique entre deux points  $m$  et  $m_0$  de  $M$  sera alors notée  $d(m, m_0)$  et  $\Delta : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  désignera l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à cette métrique riemannienne.

Nous allons étudier le comportement asymptotique ( $t \rightarrow +\infty$ ) des solutions indéfiniment dérivables  $u : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u .$$

Soient  $H_k \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ ,  $k \geq 0$ , les espaces usuels d'harmoniques sphériques ;  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  appartient à  $H_k$  si  $\varphi$  est la restriction à  $M$  d'un polynôme homogène de degré  $k$  en  $n$  variables dont le laplacien ordinaire est nul. Les  $H_k$  sont les espaces propres de  $\Delta$  et les valeurs propres correspondantes sont  $-k(k+n-2)$  ([3]).

Toute solution  $u \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R})$  de (1.1) peut être écrite sous la forme

$$(1.2) \quad u(m, t) = a_0 + \sum_{k \geq 1} a_k(m) \cos \sqrt{k(k+n-2)}t + b_k(m) \sin \sqrt{k(k+n-2)}t$$

où  $a_0$  est une constante,  $a_k$  et  $b_k$  appartiennent à  $H_k$ ,  $k \geq 1$ , et où la série (2) ainsi que toutes celles obtenues en appliquant les opérateurs  $\Delta$  et  $\frac{\partial}{\partial t}$  convergent uniformément sur  $M \times \mathbb{R}$ .