

375

ASTÉRISQUE

2015

PREQUANTUM TRANSFER OPERATOR
FOR SYMPLECTIC ANOSOV DIFFEOMORPHISM

Frédéric FAURE and Masato TSUJII

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 375, 2015

Comité de rédaction

Ahmed ABBES	Damien GABORIAU
Viviane BALADI	Michael HARRIS
Gérard BESSON	Fabrice PLANCHON
Laurent BERGER	Pierre SCHAPIRA
Philippe BIANE	Bertrand TOËN
Hélène ESNAULT	
Éric VASSEROT (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 45 € (\$67)

Abonnement Europe : 530 €, hors Europe : 569 € (\$853)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2015

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-823-7

Directeur de la publication : Marc Peigné

375

ASTÉRISQUE

2015

PREQUANTUM TRANSFER OPERATOR
FOR SYMPLECTIC ANOSOV DIFFEOMORPHISM

Frédéric FAURE and Masato TSUJII

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Frédéric Faure

Institut Fourier, UMR 5582

100 rue des Maths, BP74

FR-38402 St Martin d'Hères, France

`frederic.faure@ujf-grenoble.fr`

`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure`

Masato Tsujii

Department of Mathematics, Kyushu University

Moto-oka 744, Nishi-ku

Fukuoka, 819-0395, Japan

`tsujii@math.kyushu-u.ac.jp`

Classification mathématique par sujet (2000). — 37D20, 37D35, 37C30, 81Q20, 81Q50.

Mots-clefs. — Opérateurs de transfert, résonances de Ruelle, décroissance des corrélations, analyse semi-classique.

PREQUANTUM TRANSFER OPERATOR FOR SYMPLECTIC ANOSOV DIFFEOMORPHISM

by Frédéric FAURE and Masato TSUJII

Abstract. — We define the prequantization of a symplectic Anosov diffeomorphism $f : M \rightarrow M$ as a $\mathbf{U}(1)$ extension of the diffeomorphism f preserving a connection related to the symplectic structure on M . We study the spectral properties of the associated transfer operator with a given potential $V \in C^\infty(M)$, called *prequantum transfer operator*. This is a model of transfer operators for geodesic flows on negatively curved manifolds (or contact Anosov flows).

We restrict the prequantum transfer operator to the N -th Fourier mode with respect to the $\mathbf{U}(1)$ action and investigate the spectral property in the limit $N \rightarrow \infty$, regarding the transfer operator as a Fourier integral operator and using semi-classical analysis. In the main result, under some pinching conditions, we show a “*band structure*” of the spectrum, that is, the spectrum is contained in a few separated annuli and a disk concentric at the origin.

We show that, with the special (Hölder continuous) potential $V_0 = \frac{1}{2} \log |\det Df|_{E_u}|$, where E_u is the unstable subspace, the outermost annulus is the unit circle and separated from the other parts. For this, we use an extension of the transfer operator to the Grassmanian bundle. Using Atiyah-Bott trace formula, we establish the Gutzwiller trace formula with exponentially small reminder for large time. We show also that, for a potential V such that the outermost annulus is separated from the other parts, most of the eigenvalues in the outermost annulus concentrate on a circle of radius $\exp(\langle V - V_0 \rangle)$ where $\langle \cdot \rangle$ denotes the spatial average on M . The number of the eigenvalues in the outermost annulus satisfies a Weyl law, that is, $N^d \text{Vol}(M)$ in the leading order with $d = \frac{1}{2} \dim M$.

We develop a semiclassical calculus associated to the prequantum operator by defining quantization of observables $\text{Op}_N(\psi)$ as the spectral projection of multiplication operator by ψ to this outer annulus. We obtain that the semiclassical Egorov formula of quantum transport is exact. The correlation functions defined by the classical transfer operator are governed for large time by the restriction to the outer annulus that we call the quantum operator. We interpret these results from a physical point of view as the emergence of quantum dynamics in the classical correlation functions for large

time. We compare these results with standard quantization (geometric quantization) in quantum chaos.

Résumé (Opérateur de transfert préquantique pour un difféomorphisme symplectique Anosov.) — On définit la prequantification d'un difféomorphisme symplectique et Anosov $f : M \rightarrow M$ comme étant une extension $\mathbf{U}(1)$ de f qui préserve une connexion dont la courbure est la forme symplectique sur M . On étudie les propriétés spectrales de l'opérateur de transfert associé avec un potentiel $V \in C^\infty(M)$. On l'appelle l'opérateur de transfert préquantique. C'est un modèle pour les opérateurs associés au flot géodésique sur les variétés de courbure négative (ou les flots Anosov de contact).

On restreint l'opérateur de transfert au mode de Fourier N par rapport à l'action de $\mathbf{U}(1)$ et on étudie ses propriétés spectrales dans la limite $N \rightarrow \infty$, en considérant l'opérateur de transfert comme un opérateur intégral de Fourier et en utilisant l'analyse semi-classique. Le résultat principal, avec des conditions de pincements, montre que le spectre a une "structure en bandes", c'est à dire qu'il est contenu dans des anneaux séparés et concentriques à l'origine.

On montre qu'avec le potentiel spécial (et seulement Hölder continu) $V_0 = \frac{1}{2} \log |\det Df|_{E_u}|$, où E_u est l'espace instable, la bande la plus externe est le cercle unité et est séparé des autres bandes par un gap uniforme en N . Pour cela on utilise une extension de l'opérateur de transfert au fibré de Grassmann. En utilisant la formule des traces de Atiyah-Bott, on établit une formule des traces de Gutzwiller avec un reste décroissant exponentiellement vite en temps longs. Pour un potentiel V général, et pour $N \rightarrow \infty$, la plupart des valeurs propres de la bande externe se concentrent et s'équidistribuent sur le cercle de rayon $\exp(\langle V - V_0 \rangle_M)$ où $\langle \cdot \rangle_M$ signifie la moyenne sur M . Le nombre de valeurs propres sur la bande externe satisfait la loi de Weyl c'est à dire $N^d \text{Vol}(M)$ à l'ordre dominant, avec $d = \frac{1}{2} \dim M$.

On développe un calcul semi-classique associé à l'opérateur préquantique en définissant une quantification des observables $\text{Op}_N(\psi)$ comme étant la projection de l'opérateur multiplication par ψ sur l'espace spectral de la bande extérieure. On obtient une formule de transport de "type Egorov" qui est exacte. Les fonctions de corrélations définies par l'opérateur de transfert sont gouvernées en temps long par l'opérateur restreint à la bande externe que l'on appelle opérateur quantique. On interprète ces résultats d'un point de vue physique comme l'émergence de la dynamique quantique dans les fonctions de corrélations classiques en temps longs. On compare ces résultats avec la quantification géométrique (standard) en chaos quantique.

CONTENTS

1. Introduction and results	1
1.1. Introduction	1
1.2. Definitions	5
1.3. Results on the spectrum of the prequantum operator $\hat{F}_N$	11
1.4. Spectral results for extended models on the Grassmanian bundle ...	17
1.5. Gutzwiller trace formula	22
1.6. Dynamical correlation functions and emergence of quantum dynamics	25
1.7. Semiclassical calculus on the quantum space	29
 2. Semiclassical description of the prequantum operator $\hat{F}_N$	35
2.1. The associated canonical map $F : T^*M \rightarrow T^*M$	35
2.2. The trapped set K	41
2.3. Microlocal description near the trapped set. Sketch of proof of the main theorem	47
 3. Resonances of linear expanding maps	51
3.1. Bargmann transform	51
3.2. Action of linear transforms	55
3.3. The weighted spaces $L^2\left(\mathbb{R}^{2D}, (W_h^r)^2\right)$	58
3.4. Spectrum of transfer operator for linear expanding map	60
3.5. Proof of Claim (2) in Proposition 3.4.6	65
 4. Resonances of hyperbolic linear prequantum maps	73
4.1. Prequantum transfer operator on $\mathbb{R}^{2d}$	73
4.2. Prequantum transfer operator for a symplectic affine map on $\mathbb{R}^{2d}$...	74
4.3. Prequantum transfer operator for a linear hyperbolic map	78
4.4. Anisotropic Sobolev space	79
4.5. The structure of prequantum transfer operator for hyperbolic symplectic linear map	81
4.6. An affine transformation group $\mathcal{A}$	84
 5. Nonlinear prequantum maps on $\mathbb{R}^{2d}$	85
5.1. Truncation operations in the real space	86

5.2. Decomposition of the projection operator $t_h^{(k)}$ into localized rank one projectors and estimates on trace norm	90
5.3. Truncation operations in the phase space	93
5.4. Prequantum transfer operators for non-linear transformations close to the identity map	95
6. Band structure of the spectrum of $\hat{F}_N$. (Proof of Theorems 1.3.4 and 1.7.5)	105
6.1. Structure of the prequantum transfer operator $\hat{F}_N$	105
6.2. Local charts on M and local trivialization of the bundle P	109
6.3. The prequantum transfer operator decomposed on local charts	112
6.4. The anisotropic Sobolev spaces	115
6.5. The main propositions	118
6.6. Proof of Theorem 6.1.1	124
6.7. Proof of Theorem 1.7.5	128
7. The Grassmann Extension. (Proof of Theorems 1.4.9–1.4.12) ..	135
7.1. Discussion about the linear model	136
7.2. Non-linearity	139
7.3. Proof of the main theorems in the setting of Grassmanian extension ..	144
7.4. Relation between the operators $\hat{F}_N$ and $\tilde{F}_N$ (and proof of Theorem 1.4.11)	153
8. Consequences of ergodicity. (Proof of Theorem 1.3.11)	159
8.1. Time average and Birkhoff's ergodic theorem	159
8.2. Proof of concentration of the resonance to the circle $ z = e^{\langle V - V_0 \rangle}$..	162
8.3. Proof of equidistribution of the arguments of the resonances	164
9. Gutzwiller trace formula. (Proof of Th. 1.5.1)	167
9.1. The Atiyah-Bott trace formula	167
9.2. The Gutzwiller Trace formula from the Atiyah-Bott trace formula ..	169
9.3. Restriction to the external band	173
Appendix	181
10. The rough Laplacian and geometric quantization	183
10.1. The covariant derivative D	183
10.2. The rough Laplacian Δ	186
10.3. Geometric quantization of a symplectic map	190
11. Spectrum of the rough Laplacian in clusters (proof of Theorems 10.2.2 and 10.3.2)	193
11.1. The harmonic oscillator on $\mathbb{R}^D$	193
11.2. The rough Laplacian on $\mathbb{R}^{2d}$	195
11.3. The cluster structure of the spectrum of the rough Laplacian	196

11.4. Proof of the second part of Theorem 10.2.2	198
12. Quantum operator and geometric quantization (proof of Theorem 10.3.2)	203
12.1. Expression of the metaplectic correction (proof of Th. 10.3.4)	206
13. Proofs of Theorem 1.2.4 and Lemma 6.6.2	211
13.1. Proof of Theorem 1.2.4	211
13.2. Proof of Lemma 6.6.2	214
Bibliography	217

