

# BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE PANSU

**Formules de Matsushima, de Garland et propriété  
(T) pour des groupes agissant sur des espaces  
symétriques ou des immeubles**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 126, n° 1 (1998), p. 107-139

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1998\\_\\_126\\_1\\_107\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1998__126_1_107_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# FORMULES DE MATSUSHIMA, DE GARLAND ET PROPRIÉTÉ (T) POUR DES GROUPES AGISSANT SUR DES ESPACES SYMÉTRIQUES OU DES IMMEUBLES

PAR PIERRE PANSU (\*)

---

RÉSUMÉ. — On explique l'origine géométrique de deux théorèmes d'annulation, l'un dû à Y. Matsushima concerne les variétés riemanniennes localement symétriques, l'autre, dû à H. Garland, concerne les immeubles. On montre que ces formules entraînent la propriété (T) de Kazhdan.

ABSTRACT. — MATSUSHIMA'S AND GARLAND'S FORMULAS. A geometric explanation of two classical vanishing theorems is given. These are Y. Matsushima's formula (concerning locally symmetric spaces) and its analogue for buildings discovered by H. Garland. Both formulae are shown to imply Kazhdan's property (T).

## 1. Introduction

En 1962, en s'inspirant de travaux d'André Weil, Y. Matsushima a découvert une variante de la formule de Bochner, spécifique aux variétés riemanniennes compactes localement symétriques  $M$ . Dans le cas où le rang de  $M$  (*i.e.*, la dimension maximale d'une sous-variété plate totalement géodésique) est au moins égal à 2, cette formule implique que le premier nombre de Betti de  $M$  est nul. Elle s'applique sans changement à la cohomologie à valeurs dans un système local unitaire de coefficients. Depuis, cette formule a été étendue aux formes différentielles de degré supérieur.

En 1972, H. Garland a découvert un analogue combinatoire de la formule de Matsushima, qui permet d'étendre le théorème d'annulation

---

(\*) Texte reçu le 16 janvier 1996, révisé le 7 août 1997, accepté le 21 janvier 1998.  
P. PANSU, URA D 1169 du CNRS, Mathématiques, Bât. 425, Université Paris-Sud,  
91405 Orsay (France). Email : pierre.pansu@math.u-psud.fr.

Mots clés : théorème d'annulation, espace symétrique, immeuble, groupe de Kazhdan.

Classification AMS : 22D10, 22E40, 51E24.

aux réseaux des groupes algébriques  $p$ -adiques (avec certaines restrictions sur  $p$  qui ont été levées dans [BW]).

Dans cette note, on montre comment déduire les deux formules de l'invariance de la mesure de Liouville sur fibré des 2-plats par l'action naturelle de  $\mathbb{R}^2$  (resp.  $\mathbb{Z}^2$ ) sur cet espace. Ce point de vue a été inspiré par l'article [MSY] où N. Mok, Y.T. Siu et S.K. Yeung donnent une preuve nouvelle de certains résultats de superrigidité dûs à G.A. Margulis.

Les formules de Matsushima et de Garland permettent de démontrer rapidement que les groupes discrets cocompacts d'isométries de certains espaces symétriques et de certains immeubles euclidiens possèdent la propriété (T) de Kazhdan, [P], [Mo], [KS], [Z]. En effet, la propriété (T) équivaut à l'annulation de  $H^1(\Gamma, \rho)$  pour toute représentation unitaire  $\rho$  de  $\Gamma$ . Les formules entraînent de plus que, sous les mêmes hypothèse,  $H^2(\Gamma, \rho) = 0$  est séparé, (corollaires 6 et 20).

Même en l'absence de groupe d'isométrie (ce qui est le cas pour la plupart des immeubles triangulaires par exemple, [R], [RT], [T2], [S]), on peut tirer une conséquence géométrique des formules : l'annulation de l'espace  $L^2 H^1(X)$  de cohomologie  $L^2$  et le fait que l'espace  $L^2 H^2(X)$  est séparé.

Enfin, notre approche de la formule de Garland conduit à une formule nouvelle pour les immeubles carrés, *i.e.*, les produits d'arbres. Un groupe discret cocompact  $\Gamma$  d'automorphismes d'un tel immeuble n'a jamais la propriété (T), voir [BS], [NR]. Toutefois, si les projections de  $\Gamma$  sur les facteurs sont suffisamment transitives, tout quotient de  $\Gamma$  possède la propriété (T). C'est une étape dans la preuve par M. Burger et S. Mozes du fait qu'un tel quotient est nécessairement fini. Nous en donnons une preuve géométrique au paragraphe 10.

Je remercie chaleureusement Étienne Ghys, qui a attiré mon attention sur les travaux de H. Garland, Alain Valette, dont la lecture critique de [P] est à l'origine de cette note, Jacques Tits et Frédéric Haglund pour les références sur les immeubles. Je dois beaucoup à Andrzej Zuk : c'est lui qui m'a expliqué que la version discrète de la formule de Matsushima coïncide avec la formule de Garland. Je remercie M. Burger et S. Mozes pour leurs explications sur les groupes agissant sur des produits d'arbres.

## 2. Formules de Matsushima

Voici comment N. Mok, Y.T. Siu et S.K. Yeung énoncent la formule de Matsushima.

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$ . Un tenseur de courbure sur  $E$  est un tenseur de  $E^* \otimes E^* \otimes E^* \otimes E$  qui possède les mêmes

symétries que le tenseur de courbure d'une variété riemannienne. Un tel tenseur  $Q$  détermine une forme quadratique  $\overset{\circ}{Q}$  sur les 2-tenseurs.

PROPOSITION 1 (formule de Matsushima). — *Soit  $M$  une variété riemannienne compacte. Soit  $Q$  un champ de tenseurs de courbure parallèle sur  $M$ . On note  $\overset{\circ}{Q}$  la forme quadratique définie par  $Q$  sur les 2-tenseurs. Soit  $\alpha$  une 1-forme différentielle sur  $M$ ,  $D\alpha$  sa dérivée covariante. Alors*

$$\int_M Q(D\alpha) = -\frac{1}{2} \int_M \langle Q(\alpha), R(\alpha) \rangle.$$

*En particulier, si  $M$  est localement symétrique et localement irréductible, alors*

$$\int_M Q(D\alpha) = -\frac{1}{2} \langle Q, R \rangle \int_M |\alpha|^2.$$

Il y a un tenseur de courbure canonique, noté  $I$ , sur tout espace vectoriel euclidien, dont la courbure sectionnelle est constante et vaut 1. La forme quadratique  $\overset{\circ}{I}$  qui lui correspond est la suivante : si

$$T = A + S + (\text{tr } T) \frac{g}{n}$$

est la décomposition du 2-tenseur  $T$  en partie antisymétrique  $A$ , partie symétrique à trace nulle  $S$  et composante colinéaire au produit scalaire, alors

$$\overset{\circ}{I}(T) = |T|^2 - |A|^2 - (\text{tr } T)^2.$$

Toute variété riemannienne porte au moins un champ de tenseurs de courbure parallèle, le champ de tenseurs canonique  $I$ . Si on choisit  $Q = I$ , on obtient la formule de Bochner

$$\int_M |D\alpha|^2 - |d\alpha|^2 - (\delta\alpha)^2 = - \int_M \text{Ric}(\alpha)$$

où  $\delta$  est la codifférentielle et  $\text{Ric}$  la courbure de Ricci.

Sur une variété riemannienne, il y a autant de formules de Matsushima que de tenseurs de courbure invariants par holonomie. Noter que l'application  $Q \mapsto \overset{\circ}{Q}|_{S^2 T^*}$  est injective. Par conséquent, la dimension de l'espace des tenseurs de courbure invariants par holonomie est au plus égale au nombre de composantes irréductibles  $d(M)$  dans la décomposition sous l'holonomie de l'espace  $S^2 T^* M$ .

Génériquement,  $I$  est le seul choix possible, mais sur les variétés localement symétriques, le tenseur de courbure de Riemann  $R$  lui-même

est parallèle. Dans [M], Y. Matsushima prend pour  $Q$  la projection du tenseur canonique  $I$  sur l'hyperplan orthogonal au tenseur de courbure  $R$ .

Pour une variété localement symétrique, le nombre  $d(M)$  de composantes est au plus égal à 4, et vaut 2 le plus souvent (voir [WZ]).

### 2.1. Généralisation.

Pour les applications, il est utile de se placer sous des hypothèses plus générales. On supposera que  $\Gamma$  est un groupe discret d'isométries d'une variété riemannienne  $X$  (éventuellement  $\Gamma$  a des points fixes et  $\Gamma \setminus X$  est non compact). On se donne une représentation unitaire  $\rho$  de  $\Gamma$ , éventuellement de dimension infinie. On considère alors des formes différentielles  $L^2$  tordues par  $\rho$ . Une forme tordue par la représentation  $\rho$  sur  $\Gamma \setminus X$  est une forme  $\alpha$  sur  $X$  à valeurs dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_\rho$  telle que, pour  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma^*\alpha = \rho(\gamma)\alpha$ . La norme  $|\alpha|^2$  devient une fonction sur  $X$  invariante par  $\Gamma$ , dont l'intégrale sur  $\Gamma \setminus X$  est appelée norme  $L^2$  de  $\alpha$ . On dit que  $D\alpha \in L^2$  si les dérivées partielles de  $\alpha$  au sens des distributions sont localement des fonctions  $L^2$ , et si  $|D\alpha| \in L^2(\Gamma \setminus X)$ .

La proposition suivante se démontre comme dans [MSY].

**PROPOSITION 2.** — *Soient  $X$  une variété riemannienne,  $\Gamma$  un groupe discret d'isométries de  $X$ ,  $\rho$  une représentation unitaire de  $\Gamma$ . Soit  $Q$  un champ de tenseurs de courbure parallèle sur  $X$ . Soit  $\alpha$  une 1-forme différentielle sur  $\Gamma \setminus X$  tordue par  $\rho$ ,  $D\alpha$  sa dérivée covariante. On suppose que  $\alpha$  et  $D\alpha \in L^2(\Gamma \setminus X)$ . Alors*

$$\int_{\Gamma \setminus X} Q(D\alpha) + \frac{1}{2} \langle Q(\alpha), R(\alpha) \rangle = 0.$$

Au paragraphe suivant, nous allons donner une nouvelle preuve de cette formule, pour des choix particuliers de  $Q$ .

## 3. Formule de Matsushima et espace des plats

On va faire apparaître une formule de Matsushima comme une moyenne de la formule de Bochner sur les sous-espaces plats d'un espace localement symétrique.

### 3.1. La formule de Bochner sur un tore plat.

Dans le tore plat riemannien  $T = S^1 \times S^1$ , la formule de Bochner est simplement une double intégration par parties. Soit  $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$  une 1-forme. Alors  $D\alpha$  est le 2-tenseur

$$D\alpha = \sum_{i,j=1}^2 \alpha_{i,j} dx_i \otimes dx_j$$