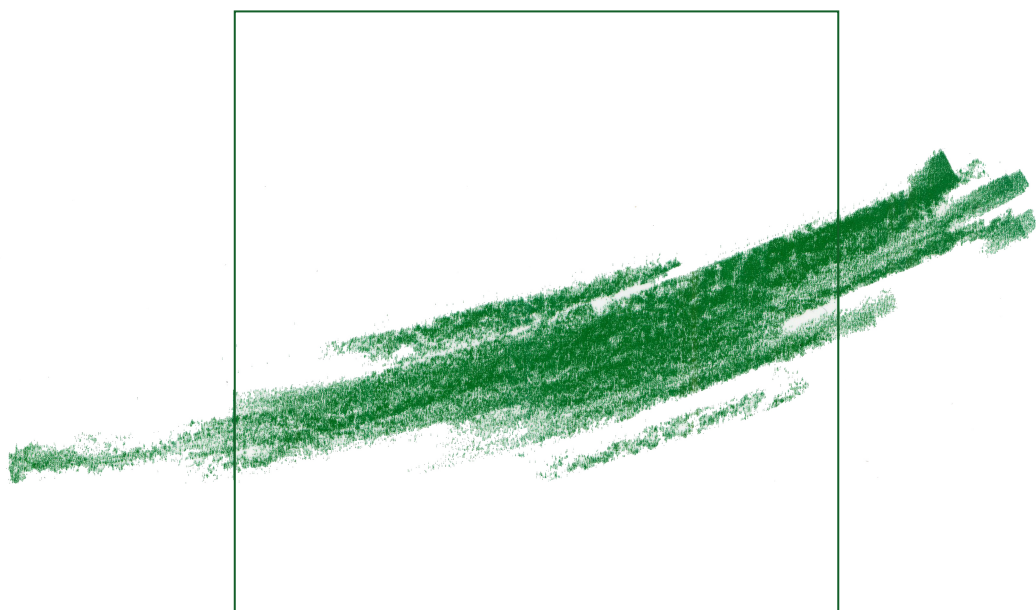


C O U R S S P É C I A L I S É S
C O L L E C T I O N S M F

Variétés algébriques réelles

Frédéric MANGOLTE



24

Épreuve SMF July 12, 2017

VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES RÉELLES

Frédéric Mangolte

Comité de rédaction

Antoine CHAMBERT-LOIR
Julie DÉSERTI

Bertrand MAURY

Grégory MIERMONT (Directeur)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

EDP Sciences
17, avenue du Hoggar
91944 les Ulis Cedex A
France
www.epdsciences.com

Tarifs

Vente au numéro : 60 € (\$ 90)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Cours Spécialisés

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2017

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 1284-6090

ISBN 978-2-85629-822-0

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES RÉELLES

Frédéric Mangolte

Épreuve SMF July 12, 2017

À mes enfants Gustave Mangolte et Jeanne Mangolte

Épreuve SMF July 12, 2017

TABLE DES MATIÈRES

Introduction – modèles algébriques des variétés lisses	1
Remerciements	6
1. Variétés algébriques	7
1.1. Variétés algébriques : points ou spectres?	7
1.2. Ensembles algébriques affines et projectifs	9
1.3. Variétés algébriques abstraites	30
1.4. Topologie euclidienne	41
1.5. Dimension, points non singuliers	44
1.6. Courbes planes	57
1.7. Parapluies	62
Solution des exercices du chapitre 1	66
2. $\mathbf{R}$-variétés	75
2.1. Structures réelles sur une variété complexe	76
2.2. $\mathbf{R}$ -variétés et variétés algébriques réelles	88
2.3. Complexification d'une variété réelle	98
2.4. $\mathbf{R}$ -variétés vs variétés algébriques réelles vs schémas sur $\mathbf{R}$	105
2.5. Faisceaux cohérents et fibrés algébriques	108
2.6. Diviseurs sur une $\mathbf{R}$ -variété projective	113
2.7. $\mathbf{R}$ -courbes planes	127
Solution des exercices du chapitre 2	132
3. Topologie des variétés avec involution	137
3.1. Homologie et cohomologie des $\mathbf{R}$ -variétés	138
3.2. Théorie de Smith	145
3.3. Majoration des nombres de Betti	149
3.4. Forme d'intersection sur une $\mathbf{R}$ -variété de dimension paire	155
3.5. Classification des $\mathbf{R}$ -courbes et VI ^e problème de Hilbert	164
3.6. Variétés Galois-Maximales	170
3.7. Cycles algébriques	178
Solution des exercices du chapitre 3	187
4. Surfaces	189
4.1. Courbes et diviseurs sur les surfaces complexes	191
4.2. Exemples de $\mathbf{R}$ -surfaces	203

4.3. R-surfaces minimales	210
4.4. Surfaces rationnelles, uniréglées ($\kappa = -\infty$)	218
4.5. Surfaces K3, d'Enriques, abéliennes, bielliptiques ($\kappa = 0$)	241
4.6. Surfaces elliptiques ($\kappa \leq 1$)	254
4.7. Surfaces de type général ($\kappa = 2$)	262
Solution des exercices du chapitre 4	275
5. Approximations algébriques	277
5.1. Modèles rationnels	277
5.2. Applications lisses et applications régulières	278
5.3. Applications à valeurs dans les sphères	284
5.4. Difféomorphismes et applications birégulières	301
5.5. Faux plans réels	315
6. Variétés de dimension 3	319
6.1. La conjecture de Nash de 1952 à 2000 en passant par 1914	319
6.2. Les 3-variétés réelles uniréglées de 2000 à 2012	328
6.3. Questions et conjectures	334
Appendices	335
A. Algèbre commutative	337
A.1. Limites inductives	337
A.2. Anneaux, idéaux premiers, idéaux maximaux, modules	338
A.3. Localisation	340
A.4. Produit tensoriel	343
A.5. Algèbres entières, théorème des zéros (Nullstellensatz)	344
A.6. Modules quadratiques sur $\mathbf{Z}$, réseaux	347
A.7. Involutions anti-linéaires	349
Solution des exercices de l'appendice A	351
B. Topologie	353
B.1. Séparation	353
B.2. Ensembles semi-algébriques	354
B.3. Complexes simpliciaux, homologie	355
B.4. Théorème des coefficients universels	357
B.5. Variétés topologiques et différentielles, orientabilité	360
B.6. Cohomologie	364
B.7. Dualité de Poincaré	366
B.8. Variétés de dimension 3	373
C. Faisceaux, espaces annelés	379
C.1. Faisceaux	379
C.2. Espace étalé dans X	381
C.3. Fibres d'un faisceau	382
C.4. Faisceau des sections d'un espace étalé	386