

**RATIONALITÉ, EXPRIMABILITÉ :
UNE RELECTURE MÉDIÉVALE DU
LIVRE X DES *ÉLÉMENTS D'EUCLIDE***

Sabine ROMMEVAUX (*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous étudions la réception des *Éléments* d'Euclide par un mathématicien du XIII^e siècle : Campanus. Nous nous intéressons à la nature de son travail sur le Livre X, à propos de la théorie de l'irrationalité. Dans la version de Robert de Chester, que Campanus utilise pour son édition, apparaissent deux notions qui ne sont pas euclidiennes, celles de « droites rationnelles en longueur » et de « droites rationnelles en puissance ». Nous nous demandons si l'introduction de ces notions manifeste une théorie différente de celle d'Euclide. Pour cela, nous examinons les premières définitions du Livre X, ainsi que quelques théorèmes du Livre XIII, pour lesquels Campanus propose des ajouts, justifiés par l'introduction de ces notions.

ABSTRACT. — RATIONALITY, EXPRESSABILITY : A MEDIEVAL READING OF BOOK X OF EUCLID'S *ELEMENTS*. — In this paper, we study the reception of Euclid's *Elements* by a 13th century mathematician : Campanus. We are interested in the nature of his work on Book X, and its theory of irrationality. In Robert of Chester's version, which Campanus used for his edition, two non euclidean notions appear, the notion of straight lines 'rational in length' and 'rational in power'. We ask the question if the introduction of these notions lead to a theory which is different from Euclid's. To answer that question, we examine the first definitions of Book X and some theorems of Book XIII, to which Campanus gives some additions called for by the introduction of the above notions.

(*) Texte reçu le 18 septembre 2000, révisé le 27 juillet 2001.

S. ROMMEVAUX, CNRS, UMR 8519 'Savoirs et Textes', Université de Lille III, BP 149, 59653 Villeneuve d'Ascq CEDEX (France).

Courrier électronique : rommevaux@univ-lille3.fr.

Mots clés : Euclide, Campanus, Livre X des *Éléments*, droites rationnelles, commensurabilité.

Classification AMS : 01A51.

INTRODUCTION¹

Campanus a composé sa version des *Éléments de géométrie* d'Euclide aux alentours de 1260². Il ne s'agit pas d'une traduction, mais d'une réécriture faite à partir de traductions arabo-latines des *Éléments* réalisées au XII^e siècle et de traités originaux³. Dans un précédent article [Rommevaux 1999], j'ai examiné la nature du travail de Campanus sur le traité euclidien à propos de la théorie de la proportionnalité numérique du début du Livre VII. J'ai montré qu'il prend différentes formes : ajouts de définitions, d'axiomes ou de postulats, voire de propositions, explication de présupposés euclidiens ou de lacunes propres au texte qu'il a utilisé, commentaires explicatifs ou visant à mettre en évidence la structure logique du traité. Dans le présent article, je poursuis cette étude de la réception du traité euclidien par un mathématicien du XIII^e siècle, en examinant les premières définitions du Livre X et quelques applications de l'irrationalité dans les livres stéréométriques. Le but est là encore de caractériser le travail de Campanus sur le texte des *Éléments* qu'il a utilisé, de déterminer comment il l'a perçu et ce qu'il en a fait.

La théorie euclidienne de l'irrationalité est jugée difficile, aussi bien par les mathématiciens anciens que par les commentateurs modernes. Cette difficulté provient, d'une part, du contexte géométrique dans lequel est développée cette théorie — une transcription arithmétisante rend souvent

¹ Ce travail a fait l'objet d'une communication lors de la journée sur « la pratique des commentaires mathématiques » organisée par Karine Chemla, le 20 juin 2000. Je remercie Karine Chemla et tous les participants à cette journée pour leurs remarques. Je remercie aussi Bernard Vitrac qui a pris la peine de relire ce texte et dont les suggestions m'ont été très utiles.

² Pour cette étude, j'ai utilisé l'édition de 1516 des *Éléments* de Campanus ainsi que les manuscrits de la Bibliothèque Nationale de Paris, lat. 16197 (XIII^e siècle) et lat. 16198 (XIV^e siècle), que je noterai respectivement A et B.

³ Dans son commentaire à la fin des définitions du Livre V, Campanus fait référence au second livre de l'*Arithmétique* de Jordanus dont il rapporte la définition de la similitude des rapports par l'égalité des dénominations [Campanus 1516, p. 111]. Par ailleurs il utilise largement l'ouvrage de Jordanus dans sa réécriture du Livre VII [Rommevaux 1999]. Toujours à la fin des définitions du Livre V, Campanus critique l'exposé de la proportionnalité par Aḥmad ibn Yūsuf (*Ametus filius Ioseph*) [Campanus 1516, p. 112]. Enfin, dans un ajout à la proposition XIII.9, Campanus fait référence au chapitre 9 du premier livre de l'*Almageste* de Ptolémée et lui emprunte la converse de cette proposition [Campanus 1516, p. 429]. Par ailleurs, il est probable qu'il ait utilisé pour le Livre X le commentaire d'an-Nayrizi aux *Éléments* traduit en latin par Gérard de Crémone [Busard 1998, p. 127], [Curtze, 1899].

les résultats plus immédiatement lisibles —, et d'autre part, de l'usage d'un vocabulaire spécifique qu'il n'est pas toujours aisé d'assimiler. La difficulté débute dès les premières définitions du Livre X. En effet, Euclide commence par définir la commensurabilité et l'incommensurabilité des droites entre elles, puis l'exprimabilité et l'irrationalité des droites relativement à une droite de référence. Peu importe, pour l'instant, ce que signifient ces termes. Il nous suffit de remarquer que le parallélisme entre ces deux couples de notions n'est pas immédiat, puisque l'exprimabilité recouvre deux cas, la commensurabilité en longueur, qui est la commensurabilité proprement dite, et la commensurabilité en puissance, qui est un des cas d'incommensurabilité. Dans certaines versions arabes des *Éléments*, on voit apparaître, au détour des propositions, deux notions non euclidiennes, celles d'exprimabilité en longueur et d'exprimabilité en puissance (les médiévaux disent plutôt rationalité en longueur et rationalité en puissance), qui renforcent le parallélisme avec la commensurabilité. Campanus hérite de ces notions. Nous allons voir que cela le conduit à faire certains ajouts au texte des *Éléments*, en particulier à la proposition XIII.6. En examinant ces ajouts, nous nous demanderons si l'introduction de ces notions manifeste une conception de la théorie de l'irrationalité différente de celle d'Euclide.

Avant de commencer cette étude, il convient de déterminer la version des *Éléments* que Campanus a utilisée ou du moins d'en donner certaines caractéristiques. Le texte latin sur lequel Campanus se fonde pour sa réécriture est issu de la version la plus répandue à l'époque, celle dite «version II» ou «version Adélarde II» et qui date du XII^e siècle. L'histoire de cette version est très complexe. Selon H. Busard et M. Folkerts [1992] qui ont édité ce texte, Robert de Chester pourrait en être l'auteur. Sa rédaction aurait été faite en plusieurs étapes. Dans un premier temps, l'auteur aurait compilé les énoncés à partir de versions arabes et latines : en effet, les plus vieux manuscrits de ce texte ne comportent que les énoncés. Dans un second temps, des preuves auraient été ajoutées en marge, vraisemblablement par l'auteur des énoncés, si l'on en croit H. Busard et M. Folkerts. Enfin, ces preuves auraient été insérées dans le texte en même temps qu'elles étaient retravaillées par les différentes personnes qui l'ont utilisé. Ceci explique les divergences parfois importantes entre les nombreux manuscrits qui nous sont parvenus [Busard-Folkerts

1992, p. 29–30]. Notons que ces preuves sont souvent résumées, réduites à la description des données et à la liste des propositions mises en jeu. Par ailleurs quelques commentaires émaillent le texte; en particulier, les propositions converses l’une de l’autre sont systématiquement signalées. Campanus a utilisé une (ou des) version(s) de ce texte — la comparaison des énoncés montre en effet clairement son emprunt. C’est donc relativement à ce texte qu’il s’agit de caractériser le travail de Campanus.

I. EXPRIMABILITÉ, RATIONALITÉ.

1.1. Exprimabilité, rationalité dans les premières définitions du Livre X

Les premières définitions du Livre X⁴ des *Éléments* d’Euclide présentent deux couples de termes, commensurable (*summetroi*)/incommensurable (*assumatroi*) et exprimable (*rètè*)/irrationnelle (*alogoi*). Nous reprenons ici la terminologie française adoptée par Bernard Vitrac [1998, p. 35–36] qui rend la dissymétrie des termes grecs. Pour le second couple de termes, Thomas Heath [1956, p. 10] parle quant à lui de droite rationnelle ou irrationnelle, retenant, comme nous allons le voir, la terminologie latine. La définition 1 concerne les grandeurs en général, qui sont dites commensurables lorsqu’une grandeur commune les mesure (A et B sont commensurables, s’il existe C telle que C mesure A et B). Elles sont incommensurables dans le cas contraire. Dans le cas où ces grandeurs sont des droites on parle parfois, dans les propositions, de commensurabilité en longueur, en opposition à la notion de commensurabilité en puissance introduite dans la définition 2, selon laquelle des droites sont dites commensurables (resp. incommensurables) en puissance lorsque leurs carrés sont commensurables (resp. incommensurables). Ces définitions déterminent ainsi des relations entre des couples de grandeurs, de droites ou de surfaces données.

Dans la définition 3, est introduite une droite choisie arbitrairement et qui est dite exprimable. Dans la suite du traité, Euclide posera comme droite exprimable un élément d’une figure géométrique comme le diamètre d’un cercle par exemple. Cette droite est choisie selon le contexte du problème ou du théorème. Toutefois, dès l’Antiquité, la plupart des

⁴ Se reporter au tableau des définitions en annexe.

commentateurs interpréteront la droite proposée comme une unité de mesure fixée *a priori*. Ainsi, un ajout que l'on trouve dans certains manuscrits grecs, au début de la définition 3, qualifie la droite proposée de cette manière : « celle à partir de laquelle, par convention, sont prises les mesures, par exemple d'une coudée, d'une palme, d'un doigt ou d'un pied » [Vitrac 1998, p. 44]. On retrouve cette même interprétation dans le commentaire d'an-Nayrîzî à cette définition⁵. Dans la version de Campanus, par contre, la référence à cette unité de mesure ne se trouve ni dans le corps du texte, ni dans les commentaires. La seule différence entre le texte grec et celui que Campanus reprend à Robert de Chester⁶ est l'ajout dans la définition 5 (définition 3 d'Euclide) de l'expression « *cum qua ratiocinamur* » pour qualifier la droite exprimable, que Campanus appelle rationnelle⁷. Elle anticipe la définition suivante des droites rationnelles, puisque c'est relativement à cette droite posée comme rationnelle (ou exprimable pour Euclide) que d'autres lignes seront dites rationnelles (exprimables pour Euclide) ou non, comme nous le voyons à présent.

Revenons à la définition 3 d'Euclide : cette droite E étant posée exprimable, une droite D est alors dite exprimable si elle est commensurable à E que ce soit en longueur ou en puissance seulement ($D = k \cdot E$ ou $D^2 = k' \cdot E^2$, avec k et k' rationnels⁸), et sinon, elle est irrationnelle. Enfin, la définition 4 caractérise les carrés ou surfaces exprimables et irrationnels. Le carré E^2 sur la droite exprimable donnée E est dit exprimable. Les surfaces S commensurables à E^2 sont dites elles aussi exprimables ($S = k \cdot E^2$, avec k rationnel). Celles qui lui sont incommensurables sont

⁵ Ainsi dans la traduction latine de Gérard de Crémone, on peut lire : « *cum fuerit linea existens quantitas, cum qua relique mensurantur quantitates, sicut cubiti unius, ergo cum inceptum fuerit, et posita fuerit hec mensura, cum qua relique quantitates temptantur, inveniuntur quantitates infinite, scilicet lineae infinite numerationis, quarum quaedam erunt incommunicantes ei in longitudine tantum, et alie incommunicantes in longitudine et potentie simul* » [Curtze 1899, p. 213].

⁶ Voir le tableau des définitions en annexe.

⁷ Cet ajout se trouve dans certains manuscrits de la tradition arabe [Rommevaux-Djebbar-Vitrac, 2001, annexe III].

⁸ Pour rendre mon propos plus immédiatement lisible par le lecteur moderne, j'utilise un langage algébrique qui n'est en rien une traduction des définitions euclidiennes. La commensurabilité ne s'énonce pas en termes de multiplication par un entier rationnel, ni chez Euclide, ni chez Campanus. C'est une notion géométrique.