Séminaire BOURBAKI Novembre 2024
76e année, 2024–2025, no 1229, p. 49 à 83
doi : 10.24033/ast.1254

VALEURS CRITIQUES DES FONCTIONS L DE PUISSANCES SYMÉTRIQUES DE FORMES MODULAIRES
[*d'après* S.-Y. Chen]

par **Michael Harris**

Introduction

L'observation que les valeurs des séries de Dirichlet aux points entiers peuvent s'exprimer comme des multiples algébriques de périodes d'intégrales est presque aussi ancienne que la théorie des séries infinies, et est certainement antérieure aux premiers travaux de Dirichlet sur les séries qui portent son nom. Pendant longtemps, les auteurs faisaient peu de cas du facteur transcendant —en général une puissance de $2\pi i$, même si les valeurs d'intégrales elliptiques ont été mentionnées dès 1897 (Hurwitz, 1897, 1899)— et se sont concentrés sur l'information arithmétique dans le facteur algébrique. Cela a commencé à changer lorsque Eichler et Shimura ont étudié les classes de cohomologie définies par des formes modulaires cuspidales qui sont des vecteurs propres pour l'algèbre de Hecke. Comme c'est le cas plus généralement, l'homologie topologique d'une courbe modulaire a une structure $\mathbb{Q}$-rationnelle canonique, tandis que la rationalité des coefficients de Fourier détermine une structure $\mathbb{Q}$-rationnelle sur la version de de Rham de la cohomologie. L'accouplement entre l'homologie et la cohomologie *ne respecte pas* ces structures rationnelles ; il introduit plutôt des facteurs de proportionnalité sous la forme d'intégrales d'une forme cuspidale f avec q-développement rationnel le long d'une base rationnelle pour l'homologie. L'article de Shimura (1959) attire l'attention sur la relation entre ces intégrales d'Eichler et les valeurs de la fonction L de Hecke $L(s, f)$ —ou, plus précisément, du produit $D(s, f)$ de $L(s, f)$ par les facteurs archimédiens (Gamma)— aux points entiers. Puisque les espaces propres de Hecke dans la cohomologie sont de dimension 2, Shimura a pu montrer que les valeurs successives de $D(m, f)$ aux points entiers m de la même parité sont des multiples algébriques du même nombre complexe, à condition que m reste dans un certain intervalle. L'article de Shimura étudie ces relations dans le cas où f est la fonction Δ de Ramanujan ; les rapports entre valeurs successives d'une parité fixée sont des nombres rationnels, que Shimura écrit explicitement dans la dernière partie de son article.

©Astérisque 462, SMF 2025

Vers la même époque, Birch et Swinnerton-Dyer ont proposé une expression explicite (conjecture BSD) pour la valeur précise au centre de symétrie $s = 1$ de la fonction $L(s, E)$ d'une variété abélienne E sur un corps de nombres F. En spécialisant au cas $F = \mathbb{Q}$, avec E une courbe elliptique, et laissant de côté le cas (particulièrement intéressant) où la valeur est 0, la valeur conjecturale est à nouveau le produit d'une période de la courbe elliptique par un nombre rationnel qui contient des informations arithmétiques.

Vers la fin des années 60 il était globalement admis que $L(s, E)$ devait être la fonction L de Hecke d'une forme modulaire f de poids 2 —c'est la *conjecture de modularité*— et donc que la période qui intervient dans la conjecture BSD était aussi une période d'Eichler–Shimura. Avec la conjecture BSD comme motivation, Birch et Manin ont réinterprété les périodes d'intégrales dans le langage des *symboles modulaires*; Mazur et Swinnerton-Dyer ont appliqué cette théorie à la construction des premières fonctions L p-adiques des formes modulaires; et Mazur est revenu aux résultats de l'article de Shimura (1959) en reliant les rapports entre les valeurs de $D(s, f)$ aux points entiers d'une parité fixée aux valeurs propres des opérateurs de Hecke.

Pour les courbes elliptiques E à multiplication complexe par un corps quadratique imaginaire K, une version forte de la conjecture de modularité a été vérifiée par Shimura; la fonction L de E s'identifie alors à la fonction L d'un certain caractère de Hecke de K. Damerell a montré que les fonctions L de certains caractères de Hecke de K —ceux de type A_0, selon la terminologie de Weil, et que nous appelerons *motiviques*— prennent en certains entiers des valeurs qui sont des multiples algébriques de puissances des périodes de E. Peu de temps après, Shimura a montré le résultat analogue —et plus difficile— pour un caractère de Hecke motivique d'un corps CM quelconque. Ce résultat est démontré dans le premier d'une série de papiers de Shimura qui raffinaient ses résultats de 1959, tout en les étendant aux fonctions L de Rankin–Selberg de *paires* de formes modulaires. Shimura fut aussi le premier à observer que les points entiers où les valeurs des fonctions L sont liées aux périodes d'intégrales —Deligne les appellera bientôt les *valeurs critiques*— sont caractérisés par l'holomorphie des facteurs Γ dans l'équation fonctionnelle.

Telle etait la situation lorsque Deligne (1979a) a commencé à formuler une conjecture générale reliant les *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales* (le titre de son article). La conjecture était énoncée pour tous les motifs sur $\mathbb{Q}$, et donc dépend ellemême de la méta-conjecture sur l'existence d'une théorie de tels motifs adéquate pour la formulation de la conjecture. On en parlera plus en détail dans la section 1, et en particulier dans le §1.3. Ici, on cite les phrases du début de l'article de Deligne qui représentent le point de départ de cet exposé :

Cet article doit le jour à D. Zagier : pour son insistance à demander une conjecture, et pour la confirmation expérimentale qu'il en a donnée, sitôt émise, pour les fonctions L_3 et L_4 attachées à $\Delta = \Sigma\tau(n)q^n$ (voir [18]). C'est cette confirmation qui m'a donné la confiance nécessaire pour vérifier que la conjecture était compatible aux résultats de Shimura [13] sur les valeurs de fonctions L de caractères de Hecke algébriques.

s	$(2\pi)^{-2s+11}\Gamma(s)L_{3,\Delta}(s)$	
18	$2^2/5$	$c_+^3 c_-$
19	$3/7$	$c_+ c_-^3$
20	$1/5$	$c_+^3 c_-$
21	$5/7^2$	$c_+ c_-^3$
22	$2\times 3/5\times 23$	$c_+^3 c_-$

s	$(2\pi)^{-3s+33}\Gamma(11)^{-1}\Gamma(s)\Gamma(s-11)L_{4,\Delta}(s)$	
24	$2^5\times 3^2$	$c_+^3 c_-^3$
26	$2^5\times 3\times 5$	$c_+^3 c_-^3$
28	$2^2\times 23\times 691/7^2$	$c_+^3 c_-^3$
30	$2^3\times 653$	$c_+^3 c_-^3$
32	$2\times 3\times 34891/7$	$c_+^3 c_-^3$

Figure 1 – Calcul par Köckritz et Schillo des valeurs de $L_{4,\Delta}$ et $L_{5,\Delta}$ reproduit dans Zagier (1977, pp. 119–120)

La dernière section de l'article de Deligne vérifie que les résultats de Shimura sur les caractères de Hecke motiviques sont grossièrement compatibles avec la conjecture que Deligne formule dans son article, bien que les deux expressions n'aient pas la même allure. Plus tard Blasius (1986) a raffiné les résultats de Shimura et a démontré la conjecture de Deligne pour la plupart des caractères de Hecke algébriques ; la démonstration complète dans ce cas était finalement obtenue dans la thèse de Kufner (2024). Mon exposé se concentre sur *l'avant-dernière section* de l'article de Deligne, qui explique ce que sa conjecture dit sur les fonctions $L_{(n)} = L_{(n)}(s, f) = L(\mathrm{Sym}^{n-1}M(f), s)$, où l'on note par $M(f)$ le motif attaché à une forme modulaire elliptique f et où Sym^{n-1} désigne la $(n-1)$-ème puissance symétrique. Les cas de L_2, déjà traités par Shimura en 1959 et dans ses papiers des années 70, et de L_3, étudiés indépendamment par Sturm et Zagier, ont suggéré une généralisation optimiste pour les autres $L_{(n)}$, mais cette formule n'était pas compatible avec des calculs numériques. La conjecture générale de Deligne donne une autre généralisation, plus subtile, pour toutes les $L_{(n)}$, et c'est cette expression que les calculs de Köckritz et Schillo (voir Figure 1) ont confirmée pour les fonctions L_4 et L_5 attachées à la fonction Δ de Ramanujan, avec une précision de plus de 30 chiffres.

Il manque toujours une théorie complète de motifs comme celle imaginée par Grothendieck. Cependant, l'article de Deligne propose un cadre motivique plus élémentaire sous la forme de la collection de différents types de groupes de cohomologie (étale, de Rham...) munis de leurs théorèmes de comparaison. Cette théorie s'adapte assez bien aux groupes de cohomologie attachés à certaines classes de formes automorphes. Les 40 années qui ont suivi la publication de l'article de Deligne ont vu la confirmation de sa conjecture pour beaucoup de types de formes automorphes. Un des premiers cas à être traité est celui de L_4 (Garrett, 1987, Remark 1.5). Les cas de L_5, L_6, et L_7 sont apparus pour la première fois dans des articles de K. Morimoto et S.-Y. Chen.

Plus récemment, Newton et Thorne ont démontré la fonctorialité de Langlands pour les puissances symétriques des formes modulaires : pour chaque f de poids $k \geqslant 2$ et chaque n il existe une représentation automorphe $\Pi_n(f)$ de $GL(n)_{\mathbb{Q}}$, cuspidale si f n'est pas de type CM, telle que $L(s, \Pi_n(f)) = L_{(n)}(s)$, où le terme de gauche est la fonction L standard de Godement–Jacquet (Godement et Jacquet, 1972). En particulier, on peut voir les valeurs critiques de $L_{(n)}$ comme des valeurs de la fonction L d'une représentation automorphe de $GL(n)$.

Dans un travail remarquable récent, Chen (2022a) a résolu la conjecture de Deligne, sous la forme explicite du théorème 6.1 (voir aussi §2.4) pour tout $L_{(n)}(s, f)$, $n \geqslant 1$, et toute forme modulaire f de poids au moins 5. Dans cet exposé, j'expliquerai les grandes lignes de l'argument de Chen.

Remarque 0.1 (« Sous certaines hypothèses »). L'article de Chen est une merveille de précision. À la composante archimédienne Π_∞ d'une représentation automorphe Π de $GL(n)$ qui intervient dans son argument on associe son caractère infinitésimal $\mu(\Pi)$, qui est une suite décroissante $\mu_1(\Pi) > \mu_2(\Pi) > \cdots > \mu_n(\Pi)$, où les $\mu_i(\Pi)$ sont dans $\mathbb{Z} + \frac{n-1}{2}$. À chaque étape de la preuve il y a une construction avec plusieurs représentations Π_i, chacune avec son paramètre $\mu(\Pi_i)$, et Chen prend soin de montrer que la construction donne les résultats prévus, à condition que les $\mu_j(\Pi_i)$ satisfassent à certaines inégalités (pour Π_i fixée ou pour plusieurs Π_i prises ensemble). Cela explique, par exemple, pourquoi la démonstration de Chen de la conjecture de Deligne marche uniquement pour les formes modulaires f de poids au moins 5.

J'ai fait le choix d'écrire « sous certaines hypothèses » chaque fois que Chen est obligé de supposer que les paramètres des Π_i satisfont à des inégalités précises. Les hypothèses sont parfaitement explicites dans Chen (2022a). Dans certains cas elles sont nécessaires pour garantir qu'une fonction L ait une valeur critique non nulle; dans d'autres cas il s'agit de choisir une Π' auxiliaire dont le caractère infinitésimal « domine » ceux des autres Π_i et où l'on dispose déjà d'un résultat sur les valeurs critiques des fonctions $L(s, \Pi' \times \Pi_i)$. Enfin, les classes de *cohomologie d'Eisenstein*, qui jouent un rôle essentiel dans la preuve, existent uniquement si certaines valeurs des séries d'Eisenstein existent et ne s'annulent pas. J'essaierai à chaque fois d'indiquer la raison pour les « certaines hypothèses » sans les écrire explicitement.

Les résultats de Chen marquent un tournant dans l'histoire de la conjecture de Deligne, et je remercie les organisateurs du Séminaire Bourbaki de m'avoir donné la possibilité de les faire connaître à la communauté. Je remercie Don Blasius, Harald Grobner et A. Raghuram, ainsi que Nicolas Bourbaki, pour leur lecture attentive et critique des versions antérieures de cet exposé. Je tiens aussi à remercier Raghuram d'avoir accepté de passer plusieurs heures à lire l'article de Chen avec moi, une collaboration qui fut aussi agréable qu'indispensable.

1. Les motifs, les périodes de Deligne et la conjecture sur les valeurs critiques

Un motif, dans la théorie conçue par Grothendieck, est un objet d'une catégorie abélienne $\mathbb{Q}$-linéaire hypothétique, obtenue en découpant les variétés algébriques à l'aide des projecteurs construits à partir de correspondances algébriques. Ainsi la catégorie des motifs fonctionnerait comme une théorie cohomologique universelle. L'article de Deligne a contribué à rendre les motifs plus accessibles en formulant sa conjecture en termes des théories cohomologiques déjà connues. Autrement dit, pour les besoins de la conjecture de Deligne, et donc pour cet article, un motif est déterminé par ses *réalisations*.

1.1. Les motifs comme réalisations

Pour nous un motif (pur) M sur $\mathbb{Q}$, à coefficients dans un corps E, de rang n et de poids w, $n \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{Z}$, consistera en les données suivantes :

1. Un E-espace vectoriel M_B (réalisation de Betti) de dimension n, muni d'une involution E-linéaire
$$F_\infty \colon M_B \xrightarrow{\sim} M_B;$$
2. Un E-espace vectoriel M_{dR} (réalisation de de Rham) de dimension n, muni d'une filtration (de Hodge) décroissante $F^i M_{dR} \subset F^{i-1} M_{dR}$, $i \in \mathbb{Z}$, par des E-sous-espaces, avec
$$F^i M_{dR} = 0 \text{ pour } i \gg 0; F^i M_{dR} = M_{dR} \text{ pour } i \ll 0;$$
3. Un isomorphisme (dit de comparaison) $E \otimes \mathbb{C}$-linéaire
$$I_\infty \colon M_B \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} M_{dR} \otimes \mathbb{C};$$
4. Pour chaque complétion non archimédienne E_λ de E, une représentation continue
$$\rho_{\lambda,M} \colon Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to Aut(M_\lambda), \text{ où } M_\lambda := M_B \otimes_E E_\lambda$$
telle que les $\rho_{\lambda,M}$ forment une famille compatible de représentations λ-adiques de poids w. Cela veut dire que si p est un premier non ramifié pour $\rho_{\lambda,M}$, alors les valeurs propres de $\rho_{\lambda,M}(Frob_p)$ (Frobenius géométrique) sont des nombres algébriques α, indépendants de λ, tels que $|\iota(\alpha)| = p^{\frac{w}{2}}$ pour tout plongement $\iota \colon \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$.