Séminaire BOURBAKI Janvier 2025
76e année, 2024–2025, nº 1232, p. 165 à 185
doi : 10.24033/ast.1257

THÉORIE DE L'HOMOTOPIE QUANTITATIVE
[*d'après* Guth, Manin, Weinberger...]

par **Pierre Pansu**

1. Introduction

Le but de la théorie de l'homotopie, en topologie, c'est de simplifier, après déformation continue, des applications continues entre espaces topologiques. Dans ce texte, on s'intéresse aux questions quantitatives que cela soulève.

Commençons par des exemples.

1.1. Nombre de tours

On s'intéresse aux courbes fermées, i.e. aux applications continues du cercle unité S^1 dans le plan privé d'un point p (Figure 1.a). Quand peut-on déformer deux courbes l'une en l'autre en évitant p ?

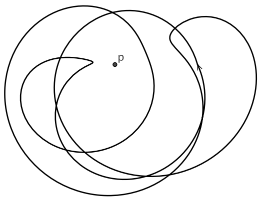

Figure 1.a

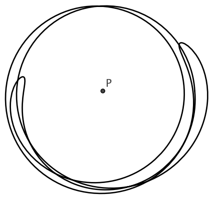

Figure 1.b

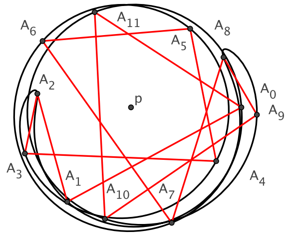

Figure 1.c

Réponse : quand elles font le même nombre de tours autour de p.

Ce nombre est un entier relatif. Est-il compliqué à calculer ? Pour cela, on projette radialement la courbe sur le cercle $\mathscr{C}$ centré en p, de rayon 1, comme sur la Figure 1.b. (attention, sur cette figure, pour la lisibilité, on représente une courbe voisine de $\mathscr{C}$ plutôt que posée sur $\mathscr{C}$). On va supposer la vitesse angulaire bornée par un nombre entier L, et contrôler la complexité du calcul en fonction de L. On subdivise S^1 en $3L$ intervalles égaux, et on remplace la courbe projetée par une ligne brisée inscrite dans $\mathscr{C}$ (Figure 1.c).

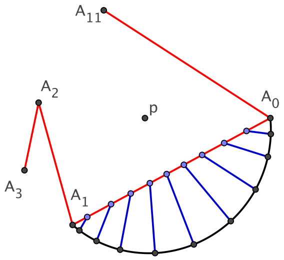

Figure 2.a

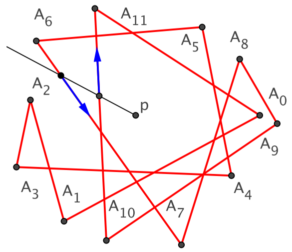

Figure 2.b

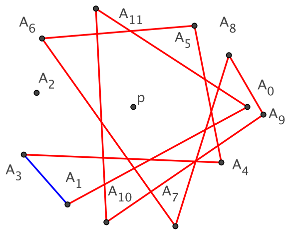

Figure 2.c

Le facteur 3 fait que chaque segment est vu de p sous un angle au plus $2\pi/3$, on peut donc pousser chaque point de l'arc de $\mathscr{C}$ de mêmes extrémités jusqu'à la corde sans passer par p (Figure 2.a). Cette déformation a lieu à vitesse bornée, prend un temps borné et double au pire la vitesse angulaire. On compte le nombre d'intersections (avec signe) de la ligne brisée avec un rayon quelconque, cela donne le nombre de tours (Figure 2.b). Ici, il vaut 0. Ce calcul fait intervenir au plus $3L$ fois le même prédicat : intersection d'un segment et d'une demi-droite, son coût est linéaire en L.

Pour simplifier la ligne brisée, chaque fois qu'au voisinage d'un sommet A_i, l'angle polaire change de sens de variation, on le supprime et on remplace les segments $[A_{i-1}A_i]$ et $[A_iA_{i+1}]$ par $[A_{i-1}A_{i+1}]$ (Figure 2.c). En moins de $3L$ étapes, on arrive ou bien à un unique sommet (c'est le cas ici), ou bien à une ligne brisée qui coupe tous les rayons dans le même sens, qu'on peut aisément déformer en un paramétrage à vitesse constante de $\mathscr{C}$ parcouru plusieurs fois.

On a vu que la borne supérieure de la vitesse angulaire L constituait une bonne mesure de la complexité de la courbe donnée. Inversement, quels nombres de tours peuvent-ils être réalisés par des courbes de vitesse angulaire $\leqslant L$?

Réponse : exactement tous les entiers compris entre $-L$ et L.

Les exemples réalisant les nombres de tours prescrits sont les paramétrages à vitesse constante de $\mathscr{C}$.

Inversement, le calcul ci-dessus donne une borne $3L$ pour le nombre de tours. La borne optimale L repose sur la géométrie différentielle. Soit $d\theta$ la 1-forme différentielle angulaire en coordonnées polaires de centre P. Si $f\colon S^1 \to \mathscr{C}$ désigne la courbe projetée, la forme différentielle (mesurable) $f^*d\theta$ a une norme $\leqslant L$ en chaque point, donc son intégrale $\int_{S^1} f^*d\theta \leqslant 2\pi L$. Or le nombre de tours peut s'écrire $\frac{1}{2\pi}\int_{S^1} f^*d\theta$ (c'est le point de vue adopté par Milnor (1965)).

1.2. Degré

Le nombre de tours d'une application continue $S^1 \to S^1$ se généralise. Soient X et Y deux variétés compactes sans bord orientées de même dimension n. Le *degré* d'une application lipschitzienne $f\colon X \to Y$ est le nombre entier

$$\deg(f) := \frac{\int_X f^*\omega}{\int_Y \omega},$$

indépendant du choix de n-forme différentielle ω (L. Brouwer (1911) le définissait différemment). C'est un invariant d'homotopie. Lorsque $Y = S^n$ est la n-sphère, c'est le seul invariant : deux applications $X \to S^n$ sont homotopes si et seulement si elles ont même degré (Brouwer (1911) et Hopf (1927) si $X = S^n$). On munit une fois pour toutes X et Y de métriques riemanniennes, et on choisit de mesurer la complexité des applications de X dans Y par la constante de Lipschitz notée Lip. Elle majore le degré,

$$|\deg(f)| \leqslant C \operatorname{Lip}(f)^n,$$

où la constante C ne dépend que des métriques riemanniennes choisies. Lorsque $Y = S^n$, cette borne est optimale : le degré d est réalisable par une application de constante de Lipschitz $O(|d|^{1/n})$. Il suffit pour cela de placer dans Y un nombre $|d|$ boules disjointes de rayon $|d|^{-1/n}$ et d'enrouler chacune sur la sphère, le bord étant envoyé sur un point fixe o de S^n.

On verra plus loin (Théorème 3.7) que ce n'est pas le cas en général, même lorsque $X = Y$: il arrive qu'il existe des applications $X \to X$ de degré d élevé, mais leur complexité, mesurée par la constante de Lipschitz, est nécessairement strictement plus grande que $d^{1/n}$.

1.3. Lacets

Voici une autre généralisation du nombre de tours. Soit X une variété riemannienne, et o un point de X. Le *groupe fondamental* $\pi_1(X, o)$ est l'ensemble des classes d'homotopie de lacets basés en o, i.e. d'applications de S^1 dans x astreintes à envoyer le point 1 de S^1 sur o. Il possède une structure de groupe induite par la concaténation des lacets. Dans le cas du plan privé d'un point, ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}$, l'isomorphisme est donné par le nombre de tours.

Lorsque X est compacte, on peut décrire ce groupe par une présentation finie : un ensemble fini S de générateurs (tout élément du groupe est un produit de puissances de générateurs) et un ensemble fini R de relateurs (tout produit de puissances des générateurs qui vaut l'élément neutre peut se réécrire comme un produit de conjugués de relateurs).

Quand un lacet donne l'élément neutre du groupe fondamental de X, on peut le déformer continûment jusqu'au lacet constant, noté encore o.

Est-ce coûteux ? Mesurons le coût en termes de constante de Lipschitz $\mathrm{Lip}(H)$ d'une application $H\colon [0,1] \times S^1$ dans X telle que $H_{|\{0\}\times S^1}$ est le lacet $f\colon S^1 \to X$ donné, et $H_{|\{1\}\times S^1}$ est constante. La meilleure déformation est celle qui réalise

$$h(f) := \inf\{\mathrm{Lip}(H)\,;\, H_{|\{0\}\times S^1} = f,\, H_{|\{0\}\times S^1} = o\}.$$

On s'intéresse à la fonction

$$c(\ell) = \sup\{h(f)\,;\, f \text{ lacet de longueur } \leqslant \ell, \text{ homotope à } o\}.$$

On montre aisément que c contrôle la difficulté du *problème du mot* dans la présentation $\langle S|R\rangle$: à des constantes près, le nombre de conjugués de relateurs nécessaire pour attester qu'un élément $\prod_i s_i^{m_i}$ est neutre est au plus $c(\sum_i |m_i|)$. Or on sait depuis Boone (1954) et Novikov (1955) qu'il existe des présentations de groupes pour lesquelles il n'existe aucun algorithme permettant de décider si un produit de puissances des générateurs est neutre ou non. De telles présentations peuvent être codées dans une variété compacte sans bord de dimension 4 ou plus. Pour une telle variété, la fonction c n'est pas bornée par une fonction récursive. Familièrement dit, pas vraiment calculable. Ce n'est pas tout de dire qu'un lacet dans une variété est homotope à 0, réaliser concrètement la déformation continue est une tâche insurmontable dans certaines variétés, dès la dimension 4.

1.4. Questions

Ce qui empêche de simplifier une application continue par déformation, ce sont des invariants homotopiques. Dans ce texte, on va effleurer les questions suivantes :

▷ Le calcul des invariants est-il possible (décidable) ? Si oui, à quel coût ?

▷ Construire des représentants de faible complexité et dont les valeurs des invariants sont prescrites est-il possible ? Si oui, à quel coût ?

▷ Étant données deux applications qu'on sait pouvoir déformer l'un dans l'autre, quelle est la complexité des déformations nécessaires ?

Les réponses, souvent récentes, sont d'une grande diversité. En outre, bien des questions restent ouvertes, montrant que la topologie n'a pas dit son dernier mot, même en basses dimensions.

Remerciements. — Un grand merci à Fedor Manin et Clément Maria pour leur aide, à Larry Guth pour ses textes très éclairants et à Nicolas Bourbaki pour sa vigilance.

2. Calculer des invariants

Si X et Y sont des espaces topologiques, on note $[X,Y]$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de X dans Y. Dans quel sens cet ensemble peut-il être calculé ? Ce paragraphe a pour seule ambition de fournir une sorte d'inventaire journalistique.

2.1. Déterminer les classes d'homotopie

Lorsque X est la n-sphère S^n, $n \geqslant 2$, $\pi_n(Y) := [S^n, Y]$ possède une structure de groupe abélien, on l'appelle le n-ème groupe d'homotopie de Y. Le calcul de tous les groupes d'homotopie rationnelle (i.e. tensorisés par $\mathbb{Q}$), en toute généralité, est #P-difficile (Anick, 1989) (qui, toutefois, suppose Y donné comme un CW-complexe, structure de donnée plus concise qu'une triangulation, par exemple). La classe #P est l'analogue de NP pour la classe des problèmes de comptage : compter le nombre de solutions d'une équation. Être #P-difficile est considéré comme un résultat strictement plus fort qu'être NP-difficile.

Le calcul de $[X,Y]$ quand Y est $(d-1)$-connexe est décidable si $\dim(X) \leqslant 2d-2$, (Čadek, Krčál, Matoušek, Sergeraert et al., 2014). Sous ces hypothèses, $[X,Y]$ est un groupe abélien de type fini, on le décrit comme somme directe de groupes monogènes. L'histoire commence avec Brown (1957), qui donne un algorithme pour le calcul des groupes d'homotopie des complexes simpliciaux dont tous les groupes d'homotopie sont finis. La méthode consiste à construire effectivement la tour de Postnikov de Y comme complexe semi-simplicial. La tour est un moyen de décrire un type d'homotopie à partir des briques élémentaires que sont les espaces d'Eilenberg–McLane, espaces dont un seul groupe d'homotopie est non trivial. Cela ramène le calcul de chaque groupe d'homotopie à un calcul de groupe d'homologie, i.e. à des systèmes linéaires sur $\mathbb{Z}$.

La méthode fait intervenir des complexes infinis, car les modèles semi-simpliciaux complets des espaces d'Eilenberg-McLane sont infinis (même $K(\mathbb{Z},1)$ qui a le type d'homotopie du cercle). D'où la nécessité d'introduire une nouvelle catégorie, celle des *espaces à homotopie effective*, structure de donnée implicite qui permet néanmoins des calculs explicites. Le logiciel *Kenzo* implémente ces idées de façon efficace, (Dousson, Rubio, Sergeraert et Siret, 1998).

Sous les mêmes hypothèses, il est vraisemblable que le calcul de $[X,Y]$ soit faisable en temps polynomial à d fixé, voir Čadek, Krčál, Matoušek, Vokřínek et Wagner (2014b) dûment complété par le caveat de F. Sergeraert (2015).

F. Manin (2023) remplace l'hypothèse $d-1$-connexe par l'hypothèse plus vaste "ayant le type d'homotopie rationnelle d'un H-espace jusqu'en dimension d". Il traite aussi le problème relatif : extension continue à X (de dimension $\leqslant 2d-1$) d'une application donnée sur un sous-complexe A de X.