Séminaire BOURBAKI Janvier 2025
76e année, 2024–2025, no 1233, p. 187 à 220
doi : 10.24033/ast.1258

ESTIMATIONS *A PRIORI* UNIFORMES POUR L'ÉQUATION DE LANDAU
[*d'après* Nestor Guillen et Luis Silvestre]

par **Isabelle Tristani**

1. Introduction

1.1. Le modèle cinétique

L'équation de Landau est une équation centrale en physique des plasmas et a été dérivée par Landau (1936) indépendamment de l'équation de Boltzmann, l'autre modèle central de la théorie cinétique des gaz. Elle décrit l'évolution d'une densité de particules $f = f(t,x,v)$ au temps $t \in \mathbf{R}^+$, à la position $x \in \Omega \subset \mathbf{R}^3$ et ayant la vitesse $v \in \mathbf{R}^3$. Elle s'écrit de la manière suivante :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = q(f,f)\,. \tag{1}$$

Dans cette équation, nous retrouvons l'opérateur de transport libre $\partial_t + v \cdot \nabla_x$ qui traduit le fait que les particules évoluent en ligne droite à vitesse constante si elles ne subissent pas d'autres interactions. Notons que dans cette équation, les éventuels champs auto-induits par les particules elles-mêmes ne sont pas pris en compte. La partie collisionnelle de l'équation est donnée par l'opérateur de Landau noté ici q. Il s'agit d'un opérateur qui n'agit que sur la variable v, non linéaire et intégro-différentiel. Il s'écrit de la manière suivante : pour des distributions $f = f(v)$ et $g = g(v)$ assez régulières,

$$q(g,f)(v) := \sum_{i=1}^{3} \partial_{v_i} \int_{\mathbf{R}^3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij}(v-w)(\partial_{v_j} - \partial_{w_j})[f(v)g(w)]\,\mathrm{d}w\,, \quad \forall\, v \in \mathbf{R}^3\,, \tag{2}$$

avec

$$a_{ij}(z) = \alpha(|z|)|z|^2 \Pi_{ij}(z)\,, \quad \forall\, i,j = 1,2,3\,, \tag{3}$$

où α est la fonction positive donnée par

$$\alpha(r) = r^\gamma\,, \quad \forall\, r \in \mathbf{R}^+ \quad \text{avec} \quad \gamma \in [-3,1]\,,$$

et pour $z \in \mathbf{R}^3$, $\Pi_{ij}(z)$ est la (i,j)-ème composante de la projection orthogonale Π sur $z^\perp$ donnée par

$$\Pi_{ij}(z) = \left(\delta_{ij} - \frac{z_i z_j}{|z|^2}\right), \quad \forall\, i,j = 1,2,3. \tag{4}$$

Suivant la terminologie usuelle, nous parlerons de potentiels durs si $\gamma \in]0,1]$, de molécules maxwelliennes si $\gamma = 0$, de potentiels modérément mous si $\gamma \in [-2,0]$ et de potentiels très mous si $\gamma \in [-3,2[$. Le cas $\gamma = -3$ correspond à la description de particules chargées qui interagissent selon un potentiel de Coulomb. Il s'agit du seul cas pertinent physiquement. L'équation est tout de même étudiée pour les autres valeurs de γ, notamment car elle peut être obtenue à partir de l'équation de Boltzmann dans la limite dite des collisions rasantes, quelques références sont données à ce sujet dans le paragraphe qui suit.

Introduisons l'opérateur de Boltzmann. Il s'agit d'un opérateur intégral bilinéaire qui s'écrit de la manière suivante : pour des distributions $f = f(v)$ et $g = g(v)$ assez régulières,

$$q_B(g,f)(v) := \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}^2} B(v-w,\sigma)\big(g(w')f(v') - g(w)f(v)\big)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}\sigma. \tag{5}$$

Dans cette formule, (v,w) (resp. (v',w')) désignent les vitesses d'une paire de particules collisionnelles après (resp. avant) la collision. La structure de l'opérateur fait naturellement apparaître un terme de gain et un terme de perte correspondant au fait que certaines particules acquièrent la vitesse v après une collision alors que d'autres la perdent. Les vitesses (v,w) et (v',w') obéissent aux lois des collisions élastiques, il y a ainsi conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie au cours des collisions (on suppose ici que toutes les particules ont la même masse) :

$$v + w = v' + w' \quad \text{et} \quad |v|^2 + |w|^2 = |v'|^2 + |w'|^2. \tag{6}$$

Cela fournit 4 équations pour 6 inconnues, les vitesses (v',w') peuvent ainsi être paramétrées par un élément σ de la sphère $\mathbf{S}^2$:

$$v' = \frac{v+w}{2} + \frac{|v-w|}{2}\sigma \quad \text{et} \quad w' = \frac{v+w}{2} - \frac{|v-w|}{2}\sigma. \tag{7}$$

Dans la formule (5), le noyau de collision B dépend du type d'interactions considérées. Lorsque les particules interagissent selon un potentiel du type $\phi(r) = r^{-p+1}$ où p est tel que $p \in (2,+\infty)$, on ne dispose pas de formule explicite pour B mais on sait d'après Maxwell (1867) que

$$B(v-w,\sigma) = |v-w|^\gamma b(\cos\theta) \quad \text{avec} \quad \cos\theta = \frac{v-w}{|v-w|}\cdot\sigma$$

où

$$\gamma := \frac{p-5}{p-1} \in]-3,1[\quad \text{et} \quad b(\cos\theta) \sim_{\theta\to 0} \theta^{-2-2s}, \quad s := \frac{1}{p-1} \in]0,1[. \tag{8}$$

On s'aperçoit dans ce type de modèle que les interactions à longue portée sont prises en compte (cela correspond à une équation de Boltzmann dite sans troncature angulaire). Cela engendre la présence de collisions rasantes (correspondant à de petits angles de collision θ) qui sont responsables de la singularité en $\theta = 0$ vue en (8) qui a pour conséquence la non intégrabilité du noyau de Boltzmann sur la sphère. Nous renvoyons à Villani (2002) pour une présentation plus complète des différents types de noyaux. Il est important de mentionner que l'opérateur de Boltzmann n'a pas de sens pour des particules interagissant selon un potentiel coulombien (correspondant à $p = 2$ ci-dessus). Le fait d'opérer une troncature sur le potentiel de Coulomb permet d'obtenir à la limite l'opérateur de Landau, ce processus correspond intuitivement à faire se concentrer le noyau angulaire de l'opérateur de Boltzmann sur des collisions d'angle nul avec une remise à l'échelle appropriée de l'équation. Cette limite de collisions rasantes a été largement étudiée entre autres dans les articles de Desvillettes (1992), Goudon (1997), He (2014) et Villani (1998b) et aussi par Alexandre et Villani (2004) qui donnent la première étude du problème dans un cadre inhomogène en espace. Nous mentionnons également le travail plus récent de Yang et Zhou (2024) dans lequel les auteurs donnent un nouveau point de vue sur la limite de collisions rasantes en s'appuyant sur la limite $s \to 1$ du paramètre s qui mesure la singularité angulaire du noyau de l'opérateur de Boltzmann dans (8).

1.2. Le modèle homogène en espace

Dans la suite, nous ne considèrerons qu'une version homogène en espace de l'équation de Landau (9). Plus précisément, nous considérons des densités de particules qui ne dépendent que de la vitesse v et pas de la position x. Ainsi, l'équation de Landau se réduit à

$$\partial_t f = q(f, f)\,. \tag{9}$$

Une autre manière de voir ce cadre homogène en espace est de considérer des données initiales pour l'équation (1) qui ne dépendent pas de x, la propriété d'être homogène en espace étant ensuite propagée par l'équation.

1.3. Résultat principal

L'étude des solutions de l'équation (9) est l'objet de cette présentation. Plus précisément, Guillen et Silvestre (2023) ont découvert une nouvelle fonctionnelle de Lyapunov pour cette équation, l'information de Fisher. Cela était déjà connu pour les molécules maxwelliennes (i.e. $\gamma = 0$) mais pas pour les potentiels très mous incluant le cas physique d'un potentiel coulombien. Cette nouvelle estimation *a priori* pour l'équation permet d'obtenir de nouvelles bornes sur la solution dans un espace de type L^3. Il est par ailleurs connu qu'en combinant cela avec des résultats antérieurs de propagation des moments, on peut utiliser des arguments de théorie elliptique à la De Giorgi–Nash–Moser pour récupérer une borne L^∞ sur la solution. Grâce à cela, Guillen et Silvestre (2023) parviennent à prouver l'existence de solutions fortes globales à l'équation (9) pour tout type de potentiel (cf. théorème 5.1).

Ainsi, la découverte majeure de Guillen et Silvestre (2023) est la preuve de la décroissance de l'information de Fisher (définie en (24)) le long des solutions de l'équation (9). Plus précisément, ils prouvent le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Soit $\gamma \in [-3,1]$. Soit $f : [0,T] \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^+$ une solution classique de l'équation de Landau (9) associée à un potentiel $\alpha(r) = r^\gamma$ dans (3). Alors $i(f)$, l'information de Fisher de la solution f, est une fonction décroissante du temps.*

Guillen et Silvestre (2023) prouvent en fait le résultat pour toute fonction positive α satisfaisant la borne

$$\sup_{r>0} \frac{r|\alpha'(r)|}{\alpha(r)} \leqslant \sqrt{19},$$

qui est bien vérifiée par $\alpha(r) = r^\gamma$ pour tout $\gamma \in [-3,1]$, le théorème permet donc de couvrir tous les types de potentiels, y compris le potentiel physique coulombien.

La première idée de la preuve consiste, grâce à une tensorisation du problème, en une réécriture de l'équation qui permet de passer d'une équation non linéaire et non locale à une équation linéaire du second ordre locale avec coefficients explicites. Les auteurs développent ensuite une preuve algébrique basée sur une compréhension profonde de la géométrie du problème qui leur permet de réduire la question à la preuve d'une inégalité fonctionnelle sur la sphère (cf. théorème 4.12). Cette inégalité peut en fait se réécrire au moyen d'opérateurs intrinsèques sur la sphère complètement indépendants du problème de départ, même si ce n'est pas la présentation qui a été adoptée par Guillen et Silvestre (2023).

1.4. Organisation du texte

Dans la section 2, nous donnons les premières estimations *a priori* classiques pour cette équation. Grâce à ces estimations notamment, des travaux ont permis de développer une théorie de Cauchy de solutions (très) faibles pour cette équation. Des résultats de régularité partielle ou conditionnelle, d'existence en temps court ont également été obtenus plus ou moins récemment mais la question de l'existence globale de solutions fortes est restée ouverte jusqu'à très récemment, un panorama non exhaustif de la littérature à ce sujet est donné dans la section 3. Comme mentionné ci-dessus, dans leur papier, Guillen et Silvestre (2023) prouvent que l'information de Fisher est décroissante le long du flot de solutions de l'équation (9), ce qui leur fournit une nouvelle estimation *a priori* pour l'équation (9) et leur permet en particulier de prouver que les solutions de l'équation de Landau Coulomb n'explosent jamais. Dans la section 4, nous présenterons la preuve de la décroissance de cette information de Fisher le long des solutions de l'équation (9), ce qui constitue le résultat central de Guillen et Silvestre (2023). Pour terminer, dans la section 5, nous expliquerons comment on peut déduire de cette nouvelle estimation *a priori* le fait que certaines solutions fortes de (9) sont globales en temps.

1.5. Notations

Pour $z \in \mathbf{R}^3$, nous noterons $\langle z \rangle := (1+|z|^2)^{1/2}$. De plus, pour $p \in [1,\infty]$ et $k \in \mathbf{R}$, nous définissons l'espace de Lebesgue à poids $L^p_k = L^p(\langle v \rangle^k)$ par sa norme

$$\|g\|_{L^p_k} = \|g\|_{L^p(\langle v \rangle^k)} := \|g\langle v \rangle^k\|_{L^p(\mathbf{R}^3)} \,.$$

Remerciements. — Je remercie vivement Bertrand Lods pour les nombreuses discussions que nous avons pu avoir sur le sujet ainsi que pour ses conseils pour la rédaction de ce texte. Je remercie également Cyril Imbert pour ses explications, Isabelle Gallagher et Nicolas Bourbaki pour leur relecture et leurs suggestions.

2. Premières propriétés

2.1. Premières estimations *a priori*

Afin d'établir formellement les premières propriétés de l'équation de Landau, nous en donnons une formulation faible : pour une fonction test convenable $\varphi = \varphi(v)$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^3} q(f,f)(v)\varphi(v)\,\mathrm{d}v &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3} a_{ij}(v-w)f(v)f(w) \\ &\qquad \left(\frac{\partial_{v_i}f(v)}{f(v)} - \frac{\partial_{w_i}f(w)}{f(w)}\right)\left(\partial_{v_j}\varphi(v) - \partial_{w_j}\varphi(w)\right)\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3} a_{ij}(v-w)f(v)f(w)\left(\partial_{v_iv_j}\varphi(v) - \partial_{w_iw_j}\varphi(w)\right)\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3} \partial_i a_{ij}(v-w)f(v)f(w)\left(\partial_{v_j}\varphi(v) - \partial_{w_j}\varphi(w)\right)\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v \,.\end{aligned} \tag{10}$$