

LA LOGIQUE CONTINUE DES CORPS GLOBALEMENT VALUÉS

par **Antoine Chambert-Loir**

À la mémoire de Zoé Chatzidakis

Introduction

La logique mathématique met en jeu des structures mathématiques c'est-à-dire des ensembles, des fonctions, ainsi que des prédicats à valeur vrai/faux, assujettis à satisfaire aux axiomes relatifs à ces structures. Un de ses objectifs est d'élucider la géométrie des *ensembles définissables* que ces fonctions et prédicats permettent de construire, un autre est d'étudier les *modèles* de ces axiomes, c'est-à-dire les structures mathématiques où ils sont vérifiés. Elle prête également une attention particulière à la nature des *formules* considérées, par exemple la présence ou la position des quantificateurs logiques. En retour, elle fournit des théorèmes généraux (comme le théorème de compacité) et des concepts structuraux (diverses notions de dimension, le concept d'imaginaire, la théorie de la stabilité...) qui permettent d'aborder des théories mathématiques de façon originale. Née des travaux de Tarski et Robinson sur la théorie des corps algébriquement clos et des corps réels clos, la théorie des modèles s'est ouverte de façon féconde à des théories moins élémentaires : algèbre différentielle, corps aux différences, corps valués...

Cet exposé est consacré au point de vue qu'offre la logique mathématique sur la notion de *hauteur* en géométrie arithmétique. Sous sa forme la plus élémentaire, où l'on s'intéresse aux solutions entières d'équations polynomiales, la hauteur correspond tout simplement à leur taille, et l'intérêt de la considérer apparaît dans la méthode de descente infinie explicitée par FERMAT (1894) dans sa lettre d'août 1659 à Carcavi. Exploitée par MORDELL (1922) et WEIL (1928), puis NORTHCOTT (1950), c'est aujourd'hui un outil primordial de la géométrie diophantienne, et également un objet de nombreuses questions ouvertes. Cette notion admet aussi un analogue sur les corps de fonctions, au parfum plus géométrique, qu'en retour, la géométrie d'Arakelov se propose de diffuser à la théorie « naïve » des hauteurs en arithmétique.

Même sur les corps de fonctions, les fonctions hauteurs sont a priori à valeurs réelles. Deux options s'offrent à la logique mathématique pour axiomatiser ces fonctions : les considérer comme à valeurs dans un corps ordonné, éventuellement réel clos, ou insister pour qu'elles soient à valeurs réelles. Dans le premier cas, le théorème de compacité et la construction de modèles « non standard » en logique classique conduiront à des hauteurs à valeurs non standard dans des corps non archimédiens, qui font perdre de vue l'intuition initiale de la descente infinie. C'est donc la seconde option qu'on va suivre, grâce au point de vue offert par la *logique continue*. Une première théorie avait été proposée dans (CHANG et KEISLER, 1966), mais la variante récente de (BEN YAACOV, 2008; BEN YAACOV, BERENSTEIN, HENSON et USVYATSOV, 2008) semble plus adaptée. Il est impossible de résumer en deux phrases ces théories mais deux images peuvent être éclairantes. La première consiste à penser les nombres réels comme des valeurs de vérité, de sorte que ces fonctions à valeurs réelles apparaissent comme des prédicats. La seconde, plus technique, observe que la topologie des espaces de types de la logique mathématique classique sont compacts et totalement discontinus, et la logique continue donne lieu à des espaces localement compacts généraux.

Avant même toute logique continue, le premier chapitre de cet exposé consistera à expliquer la notion de *corps globalement valué* qui est l'*axiomatisation* des hauteurs proposée par BEN YAACOV et HRUSHOVSKI (2022) et développée dans l'article (BEN YAACOV, DESTIC, HRUSHOVSKI et SZACHNIEWICZ, 2024). Il s'agit bien ici d'élucider les propriétés générales de ces fonctions hauteurs qui justifieraient de les étudier sur un corps arbitraire. De fait, la notion de corps globalement valué peut être abordée de plusieurs façons, et tous ces regards se complètent. Partant d'une notion de *hauteur* (définition 1.1.1) sur un corps F , nous définirons ensuite un \mathbf{Q} -espace vectoriel réticulé de *diviseurs* sur F et une forme linéaire positive sur cet espace vectoriel, puis une mesure sur espace de valeurs absolues généralisées donnant lieu à une formule du produit, d'où la terminologie de *corps globalement valué*.

Le résultat principal de ce chapitre est l'équivalence de ces points de vue. Comme on peut le deviner, la présentation en termes de mesures recoupe d'autres axiomatisations de la notion de hauteur, comme les « M-fields » de GUBLER (1997) ou les « courbes adéliques » de CHEN et MORIWAKI (2020). Nous verrons aussi comment ces corps globalement valués donnent une épaisseur supplémentaire à l'analogie entre approximation diophantienne et théorie de Nevanlinna proposée par VOJTA (1987).

Dans un second chapitre, nous expliquons comment l'on peut décrire les différentes structures de corps globalement valué dans le cas des corps F qui sont de type fini sur un sous-corps k . Lorsqu'on impose que la structure soit « triviale » sur ce sous-corps k , le groupe des diviseurs évoqués ci-dessus s'identifie au groupe des diviseurs birationnels de SHOKUROV (1996) sur un k -schéma propre, intègre, normal de corps

des fractions F . La description des structures de corps globalement valué est un raffinement du théorème de BOUCKSOM, DEMAILLY, PĀUN et PETERNELL (2013) qui décrit le cône pseudo-effectif d'une variété complexe comme le dual du cône des courbes mobiles.

En particulier, les corps de fonctions d'une variable sur k possèdent essentiellement une seule structure de corps globalement valué qui soit triviale sur k .

De même, les corps de nombres possèdent essentiellement une seule structure de corps globalement valué, donnée par la théorie classique des hauteurs. Des développements récents en géométrie d'Arakelov permettent une description des structures de corps globalement valué sur un corps F qui est de type fini sur \mathbf{Q} analogue à celle que nous avons évoquée dans le cas géométrique.

Dans un dernier chapitre, nous présentons la logique continue des corps globalement valués et expliquons les deux théorèmes qui ont suscité cet exposé. Le premier, dû à BEN YAACOV et HRUSHOVSKI (2022), affirme que si k est un corps, la clôture algébrique K de $k(T)$, munie de sa structure naturelle (triviale sur k) est un corps globalement valué *existentiellement clos*. Cela signifie en particulier que tout système d'équations constitué d'équations et d'inéquations polynomiales à coefficients dans K qui admet une solution dans un corps globalement valué L prolongeant K possède également une solution dans K dont les hauteurs seront arbitrairement proches de la première. Le second théorème, du à SZACHNIEWICZ (2023), est l'analogue pour le corps $\overline{\mathbf{Q}}$ des nombres algébriques.

C'est toute une théorie qu'ouvrent ces deux théorèmes avec, pour l'instant, plus de questions que de réponses, et nous en dirons quelques mots dans un paragraphe final.

Je remercie E. Hrushovski et S. Rideau d'avoir répondu avec tant de gentillesse à mes nombreuses questions, et les collaborateurs de N. Bourbaki de leur œil vigilant et néanmoins amical.

1. Quatre regards sur les corps globalement valués

BEN YAACOV, DESTIC, HRUSHOVSKI et SZACHNIEWICZ (2024) proposent sept regards sur la notion de corps globalement valué. Nous en présentons ici quatre : hauteurs, termes locaux, fonctionnelles divisorielles et mesures. Nous expliquerons ensuite au §1.6 comment elles conduisent à des notions équivalentes.

1.1. Hauteurs

Le premier de ces regards est une axiomatisation de la notion de hauteur en géométrie diophantienne.

Définition 1.1.1. Soit F un corps. Une *hauteur* sur F est une suite d'applications $h_n: F^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, pour $n \in \mathbf{N}$, qui vérifient les propriétés suivantes :

- (i) Pour tout n , on a $h_n(x) = -\infty$ si et seulement si $x = 0$;
- (ii) Pour tout $n \geq 1$, on a $h_n(1, \dots, 1) = 0$;
- (iii) Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et tout $x \in F^n$, on a $h_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = h_n(x)$;
- (iv) Pour tout $x \in F^m$ et tout $y \in F^n$, on a $h_m(x) \leq h_{m+n}(x, y)$;
- (v) Pour tout $x \in F^m$ et tout $y \in F^n$, on a $h_{mn}(x \otimes y) = h_m(x) + h_n(y)$, où $x \otimes y = (x_i y_j)$;
- (vi) Il existe un nombre réel e tel que $h_n(x + y) \leq h_{2n}(x, y) + e$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tous $x, y \in F^n$.

On notera souvent h au lieu de h_n .

On dit qu'une hauteur sur F est *globale* si $h_n(c \cdot x) = h_n(x)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, tout $c \in F^\times$ et tout $x \in F^n$. Elle définit alors pour tout n une fonction de $\mathbf{P}_{n-1}(F)$ dans \mathbf{R} , également notée h ; ces fonctions vérifient les propriétés algébriques classiques des hauteurs sur un corps global, à l'exception importante du théorème de finitude de Northcott. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in F^n$, on a $h_n(x) = h([1 : x_1 : \dots : x_n])$.

Le nombre réel e dans la condition (vi) est nécessairement positif ou nul; il reflète la possibilité de places archimédiennes.

Exemple 1.1.2. La théorie classique des hauteurs en géométrie arithmétique munit le corps \mathbf{Q} d'une fonction hauteur. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{Q}^n$, on pose $h_n(x_1, \dots, x_n) = -\infty$ si les x_i sont tous nuls; sinon, on note d le générateur strictement positif du sous-groupe abélien $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ de \mathbf{Q} et l'on pose

$$h_n(x_1, \dots, x_n) = \sup(\log|x_1|, \dots, \log|x_n|) / d.$$

La vérification des cinq premiers axiomes de la définition 1.1.1 est élémentaire, de même que le fait qu'il s'agit d'une hauteur globale. Pour le sixième, on peut prendre $e = \log(2)$: on se ramène à prouver l'inégalité (vi) lorsque x, y sont des éléments non nuls de \mathbf{Z}^n ; alors,

$$\begin{aligned} h_n(x + y) &\leq \log \sup(|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|) \\ &\leq \log \sup(2 \sup(|x_1|, |y_1|), \dots) \\ &\leq \log(2) + \log \sup(|x_1|, \dots, |x_n|, |y_1|, \dots, |y_n|). \end{aligned}$$

Soit k un corps. En exploitant le fait que \mathbf{Z} et $k[\mathbf{T}]$ sont tous deux des anneaux principaux, et l'analogie entre valeur absolue des entiers et degré des polynômes, on définit de même une hauteur sur le corps $k(\mathbf{T})$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout

$(x_1, \dots, x_n) \in k(\mathbb{T})^n$, on pose en effet $h_n(x_1, \dots, x_n) = -\infty$ si les x_i sont tous nuls ; sinon, on choisit un générateur du sous- $k[\mathbb{T}]$ -module $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ de $k(\mathbb{T})$ et l'on pose

$$h_n(x_1, \dots, x_n) = \sup(\deg(x_1/d), \dots, \deg(x_n/d)).$$

On obtient ainsi une hauteur globale sur $k(\mathbb{T})$; pour l'axiome (vi), on peut prendre $e = 0$.

Nous dirons que ce sont les structures de hauteurs *standard* sur \mathbf{Q} et $k(\mathbb{T})$.

La théorie classique des hauteurs étend ces définitions aux corps de nombres et aux corps de fonctions d'une variable, mais il est nécessaire, pour leur définition, de recourir à la classification des valeurs absolues sur ces corps. Elles apparaissent alors comme un cas particulier de l'exemple suivant. Nous y reviendrons également dans l'exemple 1.7.2.

Exemple 1.1.3. La notion de M-corps introduite par GUBLER (1997) ou celle de *courbe adélique* dégagée par CHEN et MORIWAKI (2020) fournissent un cadre dans lequel interpréter de façon uniforme la théorie classique des hauteurs. Une courbe adélique est formée d'un espace mesuré (Ω, μ) et d'une application de Ω dans l'ensemble M_F des valeurs absolues sur un corps F , notée $\omega \mapsto |\cdot|_\omega$, telle que pour tout $x \in F^\times$, l'application $\omega \mapsto \log|x|_\omega$ soit intégrable. La formule

$$h_n(x_1, \dots, x_n) = \int_{\Omega} \sup(\log|x_1|_\omega, \dots, \log|x_n|_\omega) d\mu(\omega) \quad (1.1.4)$$

définit alors une hauteur sur F ; cette hauteur est globale si et seulement si l'on a la *formule du produit*

$$\int_{\Omega} \log|x|_\omega d\mu(\omega) = 0 \quad (1.1.5)$$

pour tout $x \in F^\times$.

Ces exemples justifient la terminologie de corps globalement valué et suggèrent un deuxième regard sur cette structure, en termes d'espaces mesurés.

1.2. Pseudo-valuations

Pour représenter la hauteur comme une intégrale sur un espace intrinsèque, l'axiomatisation proposée par BEN YAACOV, DESTIC, HRUSHOVSKI et SZACHNIEWICZ (2024) conduit à considérer des objets un peu plus généraux que des valeurs absolues : les pseudo-valuations.

Si Γ est un groupe ordonné dont la loi est notée additivement⁽¹⁾, on note $\bar{\Gamma}$ l'ensemble ordonné obtenu par adjonction d'un plus petit et d'un plus grand éléments,

⁽¹⁾La théorie des valeurs absolues et celle des valuations conduisent à un double conflit concernant le sens de la relation d'ordre et le caractère additif du groupe de valeurs, conflit matérialisé par la relation « $v(x) = \log|x|^{-1}$ » entre les deux notions. Si le formalisme de HUBER (2013) corrige ces deux conflits, il n'est pas non plus adapté à la géométrie diophantienne dans laquelle c'est la fonction $\log|x|^{-1}$ qui possède les propriétés de *positivité* appropriées et qu'il s'agit de *sommer* ou d'intégrer.