Astérisque

BERNARD MAUREY

Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L^p

Astérisque, tome 11 (1974)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__11__1_0>

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout spécialement Monsieur Laurent Schwartz, dont l'attention et les conseils m'ont été extrêmement précieux dans la préparation de ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie Monsieur Pierre Cartier, qui a lu le manuscrit, et Monsieur Adrien Douady qui m'a indiqué un intéressant sujet de seconde thèse.

Je ne dois pas oublier de remercier mes camarades du Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, qui ont dû subir les premières versions des résultats qui suivent.

Je remercie enfin les secrétaires du Centre de Mathématiques pour leur gentillesse et leur efficacité dans la résolution des multiples problèmes techniques.

TABLE DES MATIERES

	Introduction	2
O	Conventions générales	9
I	Théorèmes de factorisation pour $p > 0$	11
II	Théorèmes de factorisation pour $p = 0$	24
III	Liens avec la théorie des opérateurs p-sommants	32
IV	Théorèmes de factorisation et opérateurs 0-sommants	48
V	Une généralisation vectorielle : les opérateurs (p,G)-sommants	60
VI	Opérateurs et espaces de type et de cotype q, $0 < q \leqslant 2$	65
VII	Espaces de cotype 2 et théorèmes de prolongement	87
VIII	Conséquences d'un lemme de H.P. Rosenthal	98
IX	Applications aux plongements dans les espaces L^p	121
X	Extension aux espaces d'Orlicz	128
XI	Questions et problèmes.	149
	Index terminologique	154
	Index des notations	156
	Bibliographie.	157
	Addendum	161
	Summary	163

INTRODUCTION

La première source d'inspiration de ce travail se trouve dans un article de E.M. Nikishin [19] qui démontre le résultat suivant : soient E un espace de Banach, (Ω, μ) un espace de probabilité et u un opérateur linéaire continu de E dans l'espace $L^0(\Omega, \mu)$ des fonctions réelles μ-mesurables, muni de la topologie de la convergence en probabilité. Il n'y a pas de raison a priori pour que les éléments de u(E) admettent un moment d'ordre p, pour un $p > 0$, c'est-à-dire appartiennent à $L^p(\Omega, \mu)$. Cependant, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $p < 1$, il est possible de trouver une partie mesurable Ω_ε de Ω, telle que $\mu(\Omega - \Omega_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, et une constante M telles que :

$$\forall\, x \in E, \qquad \int_{\Omega_\varepsilon} |u(x)|^p \, d\mu \leqslant M \, \|x\|^p$$

De cet énoncé donné par Nikishin il est facile de passer à un énoncé équivalent : tout opérateur linéaire continu d'un espace de Banach E dans un espace $L^0(\Omega, \mu)$ admet la factorisation : (pour tout $p < 1$) :

$$E \xrightarrow{\ u_1\ } L^p(\Omega, \mu) \xrightarrow{\ T_g\ } L^0(\Omega, \mu),$$

où u_1 est un opérateur linéaire continu de E dans $L^p(\Omega, \mu)$, et où T_g désigne l'opérateur de multiplication par une fonction mesurable g.

Par ailleurs, Grothendieck a démontré dans [5] un théorème de même nature : tout opérateur linéaire continu d'un espace $L^\infty(X, \nu)$ dans un espace $L^1(\Omega, \mu)$ admet la factorisation:

$$L^\infty(X, \nu) \xrightarrow{\ u_1\ } L^2(\Omega, \mu) \xrightarrow{\ T_g\ } L^1(\Omega, \mu),$$

où u_1 est un opérateur linéaire continu de $L^\infty(X, \nu)$ dans $L^2(\Omega, \mu)$, et où T_g désigne l'opérateur de multiplication par une fonction g de $L^2(\Omega, \mu)$.

Les deux articles que nous venons de citer fixent le thème de notre travail, qui est donc consacré aux théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires continus à valeurs dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$.

Notre étude empruntera beaucoup à un article récent de H.P. Rosenthal, "On subspaces of L^p" [25], dont nous généraliserons plusieurs résultats. En particulier, en utilisant un lemme très intéressant de cet article, nous donnerons une nouvelle démonstration du théorème de Grothendieck cité plus haut.

Dans la théorie des applications sommantes [27], ce théorème de Grothendieck implique que tout opérateur 2-sommant d'un espace $L^1(X,\nu)$ dans un espace quasi-normé F est 1-sommant. Un certain nombre de théorèmes analogues ont été démontrés par S. Kwapien [9] et P. Saphar [26], sans faire intervenir de théorèmes de factorisation : tout opérateur linéaire q-sommant d'un espace $L^r(X,\nu)$ dans un espace quasi-normé F est p-sommant si $0 \leqslant p \leqslant q < r' \leqslant 2$ ou si $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2 \leqslant r' < \infty$. Nous verrons que les théorèmes de cette nature impliquent des théorèmes de factorisation : tout opérateur linéaire continu d'un espace $L^{r'}(X,\nu)$ dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$ admet la factorisation:

$$L^{r'}(X,\nu) \longrightarrow L^q(\Omega,\mu) \xrightarrow{T_g} L^p(\Omega,\mu),$$

où p, q, r sont comme précédemment, et où g est une fonction de $L^s(\Omega,\mu)$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{s}$.

Notre travail est divisé en onze parties, que nous allons passer en revue :

Le chapitre I concerne le problème de factorisation proprement dit. Nous envisagerons la question de la façon suivante : soient (Ω,μ) un espace mesuré, et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions de $L^p(\Omega,\mu)$, $0 < p < \infty$. Soient d'autre part $q \geqslant p$ et r donné par $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Nous voudrions trouver une fonction $g \in L^r(\Omega,\mu)$ telle que l'on ait pour tout $i \in I$:

$$\int \left|\frac{f_i}{g}\right|^q d\mu \leqslant 1.$$

La condition nécessaire et suffisante est donnée au théorème 2. Elle s'inspire de la condition donnée dans le théorème 1 de [25].

A partir de là il est facile de donner la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire continu d'un espace quasi-normé E dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$ admette la factorisation :

$$E \longrightarrow L^q(\Omega, \mu) \xrightarrow{T_g} L^p(\Omega, \mu)$$

ou plus généralement si G est un espace quasi-normé, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire continu de E dans $L^p(\Omega, \mu, G)$ admette la factorisation :

$$E \longrightarrow L^q(\Omega, \mu, G) \xrightarrow{T_g} L^p(\Omega, \mu, G) \qquad \text{(Théorème 8).}$$

Nous étudierons ensuite dans ce premier chapitre le problème "transposé" : si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $L^q(\Omega, \mu)$, $0 < q < +\infty$, nous voulons trouver une fonction $g \in L^r(\Omega, \mu)$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ telle que l'on ait pour tout $i \in I$:

$$\int |g f_i|^p \, d\mu \geqslant 1.$$

Cette condition est donnée dans le théorème 10. On en déduit des théorèmes de factorisation pour des opérateurs linéaires continus définis sur un sous-espace S_q d'un espace $L^q(\Omega, \mu)$, et à valeurs dans un espace quasi-normé E (Corollaire 11).

L'objet du chapitre II est identique à celui du chapitre I, mais on travaille maintenant sur des opérateurs à valeurs dans un espace $L^o(\Omega, \mu)$, et les techniques seront un peu différentes (inspirées du théorème 4 de [19]). De plus, on traite un problème un peu plus général que dans le chapitre I : on recherche la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire continu d'un espace quasi-normé E à valeurs dans un espace $L^o(\Omega, \mu)$ admette la factorisation :

$$E \longrightarrow L^{\Phi}(\Omega, \mu) \xrightarrow{T_g} L^o(\Omega, \mu),$$

où Φ est une fonction de Young telle que l'espace d'Orlicz $L^{\Phi}(\Omega, \mu)$ soit quasi-normable (théorème 17).

Dans les chapitres III (pour $p > 0$) et IV (pour $p = 0$), on fera le lien entre les théorèmes de factorisation pour les opérateurs à valeurs dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$ et la théorie des applications radonifiantes. Comme dans [27] et [28] on verra apparaître l'hypothèse d'approximation dans le cas $p < 1$. Les résultats principaux sont le théorème 23 (pour $p > 0$) et le corollaire 34 (pour $p = 0$) : si E est un espace de Banach, tel que E' vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, les conditions suivantes sont équivalentes, lorsque q est un nombre réel $\geqslant p$:

a) Tout opérateur linéaire continu de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$ admet la factorisation :

$$E' \longrightarrow L^q(\Omega,\mu) \xrightarrow{T_g} L^p(\Omega,\mu)$$

(on suppose que μ est une probabilité si p = 0)

b) Pour tout espace quasi-normé F, on a :

$$\Pi_q(E,F) = \Pi_p(E,F).$$

Dans le chapitre V, on introduit la notion d'opérateur (p,G)-sommant (G étant un espace quasi-normé). Cette notion généralise celle d'opérateur p-sommant, et permet de formuler l'analogue du théorème 23 dans le cas d'opérateurs à valeurs dans $L^p(\Omega,\mu,G)$ (Théorème 39).

A partir des théorèmes connus de la forme :

$$\forall F, \quad \Pi_q(E,F) = \Pi_p(E,F) \qquad \text{(cf [9], [26] ou [3])}$$

on déduit par le théorème 23 un certain nombre de théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires continus de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, lorsque E est un espace $L^r(X,\nu)$, pour r convenable ([9] et [26]) ou un espace de Banach quelconque [3]. En fait dans le chapitre VI, nous retrouvons ces résultats par une méthode plus directe, en introduisant la notion d'espace de type q, $0 < q \leqslant 2$. Cette méthode aura l'avantage secondaire de ne pas utiliser l'hypothèse d'approximation. Lorsqu'un espace quasi-normé E est de type q, tout opérateur linéaire continu de E dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, $0 \leqslant p \leqslant q$, se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$ (Proposition 43). Nous donnerons quelques exemples d'espaces de type q, (essentiellement des espaces $L^r(X,\nu)$ ou $L^r(X,\nu,G)$, pour r et G convenables), et nous résumerons l'essentiel des résultats dans le théorème 50.

Pour finir le chapitre VI, nous appliquerons les théorèmes généraux de factorisation au cas d'opérateurs linéaires invariants par translation de $L^r(K,\chi)$ dans $L^o(K,\chi)$, où K est un groupe compact, et χ sa mesure de Haar. On verra dans ce cas que si un opérateur invariant par translation de $L^r(K,\chi)$ dans $L^o(K,\chi)$ se factorise :

$$L^r(K,\chi) \longrightarrow L^q(K,\chi) \xrightarrow{T_g} (L^o(K,\chi),$$