

Astérisque

NICOLAS BERGERON

LAURENT CLOZEL

**Spectre automorphe des variétés hyperboliques
et applications topologiques**

Astérisque, tome 303 (2005)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2005__303__R1_0>

© Société mathématique de France, 2005, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SPECTRE AUTOMORPHE DES
VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES ET
APPLICATIONS TOPOLOGIQUES**

**Nicolas Bergeron
Laurent Clozel**

N. Bergeron

Unité Mixte de Recherche 8553 du CNRS, Département de mathématiques et applications (DMA), 45, rue d'Ulm 75230 Paris Cedex 05, France.

E-mail : `Nicolas.Bergeron@ens.fr`

L. Clozel

Université Paris-Sud, Unité Mixte de Recherche 8628 du CNRS,
Laboratoire de Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France.

Classification mathématique par sujets (2000). — 11F75, 32Q45, 11G18, 14G35, 22E47, 22E55, 58J50.

Mots clefs. — Spectre automorphe, variétés arithmétiques, conjectures d'Arthur, cohomologie des variétés localement symétriques.

*À Natan, Céline et à toute l'équipe de la crèche parentale « Pic Puce »
sans qui ce livre serait déjà fini depuis quelques mois. N.B.*

SPECTRE AUTOMORPHE DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES ET APPLICATIONS TOPOLOGIQUES

Nicolas Bergeron, Laurent Clozel

Résumé. — Ce texte comporte deux parties. Dans la première nous étudions le spectre automorphe des variétés hyperboliques. Nous montrons en particulier un théorème « à la Selberg » sur la première valeur propre du laplacien sur les formes différentielles des variétés hyperboliques complexes de congruence. Notre démonstration passe par la théorie des représentations ; à ce titre nous tentons de faire un effort de vulgarisation de la théorie moderne des formes automorphes à l'attention d'éventuels lecteurs géomètres. Dans la deuxième partie du texte nous appliquons les résultats de la première partie à l'étude de la topologie des variétés hyperboliques complexes ; nous obtenons en particulier un théorème de relèvement de classes de cohomologie. La motivation principale de ce travail est donnée par les conjectures d'Arthur : celles-ci impliquent des restrictions très fortes sur le spectre des variétés arithmétiques qui à leur tour impliquent des propriétés conjecturales sur la géométrie des variétés hyperboliques. Ce texte fournit, outre des énoncés précis, la preuve de formes affaiblies de ces conjectures dans des cas particuliers.

Abstract (Automorphic spectrum of hyperbolic manifolds and topological applications)

This book is made of two parts. The first is concerned with the differential form spectrum of congruence hyperbolic manifolds. We prove Selberg type theorems on the first eigenvalue of the laplacian on differential forms. The method of proof is representation-theoretic; we hope the different chapters may as well serve as an introduction to the modern theory of automorphic forms and its application to spectral questions. The second part of the book is of a more differential geometric flavor; a new kind of lifting of cohomology classes is proved. The main motivation of this work is given by Arthur's conjectures; these conjectures implies strong restrictions on the spectrum of arithmetic manifolds which, in turn, imply conjectural properties on the geometry of hyperbolic manifolds. Together with precise statements of these conjectures, this text gives proofs of weak forms of them in some particular cases.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	xi
Un programme conjectural	xi
Description des résultats	xvi
Partie I. Spectre des variétés hyperboliques	1
1. Théorème de Matsushima	3
1.1. Sur l'opérateur de Casimir	5
1.2. Démonstration du Théorème 1.0.2	7
1.3. Représentations admissibles et spectre automorphe	7
2. Spectre du laplacien sur les quotients arithmétiques	11
2.1. Le cas des fonctions	12
2.2. Théorie des représentations	13
2.3. Principe de restriction et démonstration du Théorème 2.1.1	15
2.4. Représentations non isolées et contre-exemples à A^-	18
2.5. Perspectives : contraintes locales et contraintes automorphes	20
3. Représentations de $GL(n)$	23
3.1. Classification de Langlands	23
3.2. Correspondance de Langlands locale	25
3.3. Un peu de fonctions L	28
3.4. Dual unitaire	31
4. Représentations de $U(n, 1)$	35
4.1. Classification de Langlands	36
4.2. Groupe dual	42
4.3. Paramètres de Langlands	44
4.4. Classification et paramètres de Langlands	47
4.5. K -types des représentations induites, action du Casimir	50
4.6. Représentations de $U(2, 1)$	51

5. Représentations de $U(a, b)$ ($a, b > 1$)	55
5.1. Groupe dual	55
5.2. Représentations cohomologiques	56
5.3. Paramètres des A_q en dualité de Langlands	60
5.4. Représentations cohomologiques isolées	61
6. Conséquences des Conjectures d'Arthur	65
6.1. Paramètres d'Arthur	65
6.2. $G = U(n, 1)$	66
6.3. $G = SO(n, 1)$, n impair	74
6.4. $G = SO(n, 1)$, n pair	81
6.5. Existence des représentations exceptionnelles	83
7. Théorème de Luo-Rudnick-Sarnak	85
7.1. Fonction L de Rankin-Selberg	85
7.2. Démonstration du Théorème 7.0.1	94
7.3. Application : le théorème de Selberg	98
8. Démonstration du Théorème 1	101
8.1. Description du groupe G	101
8.2. $D = M_3(K)$	102
8.3. $D \neq M_3(K)$	105
8.4. Une Conjecture de changement de base	105
9. Démonstration du Théorème 2	111
9.1. Fonctions radiales, coefficients matriciels et fonctions sphériques	111
9.2. Fonctions sphériques du groupe $U(n, 1)$	113
9.3. L'équation différentielle radiale	116
9.4. Comportement asymptotique	117
9.5. Démonstration du Théorème 2	120
10. Démonstration du Théorème 3	127
10.1. Vrais groupes unitaires	127
10.2. Groupes exotiques : réductions	128
10.3. Contrôle du spectre pour les groupes exotiques de rang premier	130
10.4. Démonstration du Théorème 3	136
Partie II. Homologie des variétés hyperboliques	139
11. L'espace hyperbolique complexe	141
11.1. Modèle de l'hyperboloïde et modèle projectif	141
11.2. Modèle de la boule	142
11.3. Structure kahlérienne	142
11.4. Courbure	143
11.5. Volume des boules	144

12. Espaces symétriques associés aux groupes unitaires	147
12.1. Préliminaires	147
12.2. Sous-espaces totalement géodésiques	148
12.3. Croissance du volume	152
12.4. Fonction distance à l'hypersurface	157
12.5. Séries de Poincaré	162
13. Construction de la forme duale	167
13.1. Formes singulières de Bott et Chern	167
13.2. Construction de la forme duale	171
13.3. Précisions dans le cas hyperbolique complexe	177
13.4. Tours de revêtements finis	181
14. Cohomologie L^2 réduite	187
14.1. Rappels sur la cohomologie L^2	188
14.2. Théorie de Hodge des variétés kaehlériennes faiblement pseudoconvexes	189
14.3. Un théorème d'Ohsawa et Takegoshi	190
14.4. Démonstration du Théorème 14.0.6	193
15. Démonstrations des Théorèmes 4, 5 et 8	195
15.1. Démonstration du Théorème 4	195
15.2. Variétés arithmétiques	198
15.3. Rappels sur les variétés kaehlériennes	202
15.4. Démonstration du Théorème 5	204
Bibliographie	207
Index des notations	215
Index terminologique	217