

462

ASTÉRISQUE

2025

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2024/2025
EXPOSÉS 1227–1241

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France
Numéro 462.

Comité de rédaction

Eleonora DI NEZZA Rémi RHODES
Alessandra IOZZI Sug Woo SHIN
Antoine CHAMBERT-LOIR (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
B.P. 67	P.O. Box 6248
13274 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
basile.nagel@smf.emath.fr	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 95€ (\$143)
Abonnement : Europe : 665€; hors Europe : 718€ (\$1 077)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax : (33) 01 40 46 90 96
asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2025

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN : 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)
ISBN : 978-2-37905-217-0
doi : 10.24033/ast.1251

Directrice de la publication : Isabelle Gallagher

Mots clés et classification mathématique

Exposé n° 1227. — Géométrie aléatoire planaire, percolation de dernier passage, classe d'universalité de Kardar–Parisi–Zhang, permutations aléatoires – 82C23, 60F99, 60K35, 60K37.

Exposé n° 1228. — Algebraic cycles, resolution of singularities – 14C25, 14E15.

Exposé n° 1229. — Fonctions L , formes modulaires, conjecture de Deligne sur les valeurs critiques – 11F67, 11F70, 11F75.

Exposé n° 1230. — Ramsey theory, book algorithm – 05D10, 05C55.

Exposé n° 1231. — QFT, CFT, Liouville theory – 81T40, 81T08.

Exposé n° 1232. — Topologie, homotopie quantitative, constante de Lipschitz, homotopie rationnelle, indécidabilité, complexité, degré de Brouwer – 55PXX, 55P62, 55Q40, 55Q15, 55Q25, 55Q35, 55Q55, 55S45, 55-04.

Exposé n° 1233. — Équation de Landau, potentiel de Coulomb, information de Fisher, solutions globales – 35Q70, 35B45.

Exposé n° 1234. — Integrable equations, Benjamin–Ono equation – 35Q53, 37K10.

Exposé n° 1235. — Resolution, solitons, wave, energy critical, wave maps – 35L71, 35B40, 37K40.

Exposé n° 1236. — Opérateurs hypoelliptiques, calculs pseudodifférentiels, groupoïdes de Lie, cônes tangents – 47G30, 35H10, 22A22, 53C17, 22E25.

Exposé n° 1237. — Quadratic L -functions, moments, homological stability, braid groups, hyperelliptic curves, configuration spaces – 11G20, 11R59, 14G10, 14H10, 20F36, 55P35, 55P62, 55R40, 55R80, 57T25.

Exposé n° 1238. — Relative Langlands program, BZSV duality, hyperspherical varieties – 11F70, 11F67, 22E50, 22E55.

Exposé n° 1239. — Local Langlands correspondence, categorical local Langlands, p -adic geometry, Fargues–Fontaine curve, representations of p -adic groups, local and global Shimura varieties – 11S37, 14D24, 11F77.

Exposé n° 1240. — Logique continue, hauteurs, théorie de l'intersection, théorie d'Arakelov – 03C66, 14C17, 14G40.

Exposé n° 1241. — Motivic homotopy theory, motivic homotopy sheaves, motivic spectra, stable and motivic stems, algebraic and hermitian K -theories, motivic cohomology, Adams spectral sequence, synthetic homotopy – 14F42, 55Q45, 19E15, 55T15, 55P42.

SÉMINAIRE BOURBAKI

Volume 2024/2025

Exposés 1227–1241

doi : 10.24033/ast.1251

Résumé. — Ce 76^e volume du Séminaire Bourbaki contient les textes des quinze exposés présentés pendant l'année 2024/2025 : paysage dirigé, lissification de cycles algébriques, conjecture de Deligne pour les puissances symétriques des formes modulaires, bornes pour les nombres de Ramsey, interprétation probabiliste de théories quantiques des champs, théorie de l'homotopie quantitative, estimations uniformes pour l'équation de Landau, théorie spectrale et systèmes intégrables, conjecture de résolution en solitons, hypoellipticité et conjecture de Helffer et Nourrigat, moments de fonctions L et stabilité homologique, dualité de Langlands relative, géométrisation de la correspondance de Langlands, logique continue des corps globalement valués, homotopie motivique.

Abstract. — This 76th volume of the Bourbaki Seminar gathers the texts of the fifteen lectures delivered during the year 2024/2025: directed landscape, smoothing of algebraic cycles, Deligne's conjecture for symmetric powers of modular forms, bounds for Ramsey numbers, probabilistic interpretation of quantum field theories, quantitative homotopy theory, uniform estimates for the Landau equation, spectral theory and integrable systems, soliton resolution conjecture, hypoellipticity and the Helffer–Nourrigat conjecture, moments of L -functions and homological stability, relative Langlands duality, geometrization of the Langlands correspondence, continuous logic of globally valued fields, motivic homotopy theory.

TABLE DES MATIÈRES

1227	Guillaume Barraquand — Le paysage dirigé [d’après Duncan Dauvergne, Janosch Ortmann et Bálint Virág]	1
1228	Olivier Benoist — Smoothing low-dimensional algebraic cycles [after Kollár and Voisin]	27
1229	Michael Harris — Valeurs critiques des fonctions L de puissances symétriques de formes modulaires [d’après S.-Y. Chen].	49
1230	Yuval Wigderson — Upper bounds on diagonal Ramsey numbers [after Campos, Griffiths, Morris, and Sahasrabudhe]	85
1231	Martin Hairer — Probabilistic interpretation of quantum field theories [after Guillarmou, Kupiainen, Rhodes, Vargas...]	139
1232	Pierre Pansu — Théorie de l’homotopie quantitative [d’après Guth, Manin, Weinberger...]	165
1233	Isabelle Tristani — Estimations <i>a priori</i> uniformes pour l’équation de Landau [d’après Nestor Guillen et Luis Silvestre]	187
1234	Nikolay Tzvetkov — Spectral theory of nonlocal operators and infinite dimensional integrable systems [after P. Gérard, S. Grellier, T. Kappeler and P. Topalov]	221
1235	Raphaël Côte — Soliton resolution for energy critical wave type equations [after Duyckaerts–Kenig–Merle and Jendrej–Lawrie]	257
1236	Claire Debord — Hypoellipticité de polynômes de champs de vecteurs et conjectures de Helffer et Nourrigat [d’après I. Androulidakis, O. Mohsen, R. Yuncken]	289
1237	Javier Fresán — Moments of L -functions and homological stability [after Bergström–Diaconu–Petersen–Westerland and Miller–Patz–Petersen–Randal-Williams]	319
1238	Wee Teck Gan — Relative Langlands duality [after Ben-Zvi, Sakellaridis, and Venkatesh]	347
1239	Ana Caraiani — The geometrization of local Langlands [after L. Fargues and P. Scholze]	397
1240	Antoine Chambert-Loir — La logique continue des corps globalement valués	453
1241	Frédéric Déglise — Motivic homotopy theory and stable homotopy groups [after Morel–Voevodsky, Isaksen–Wang–Xu...]	495

Résumé des exposés

Guillaume Barraquand. — *Le paysage dirigé [d'après Duncan Dauvergne, Janosch Ortmann et Bálint Virág]*

Ulam a conjecturé en 1961 que la plus longue sous-suite croissante dans une permutation de $\{1, \dots, n\}$ choisie au hasard uniformément a une longueur de l'ordre de \sqrt{n} . On sait aujourd'hui que lorsque n tend vers l'infini, cette longueur fluctue autour de $2\sqrt{n}$ selon la loi de Tracy–Widom, initialement introduite pour décrire les fluctuations de valeurs propres de matrices aléatoires. Que peut-on dire plus précisément de la, ou des, sous-suites de longueur maximale ? Cette suite d'entiers aléatoires, correctement renormalisée, converge vers une courbe fractale particulière. Fort différente d'un mouvement brownien, elle est définie comme la géodésique associée à un champ de distances aléatoire appelé le paysage dirigé.

Ce champ aléatoire a été introduit récemment par Dauvergne, Ortmann et Virág. Loin de concerner seulement les permutations aléatoires, le paysage dirigé est la limite d'échelle universelle des modèles de la classe de Kardar–Parisi–Zhang, incluant modèles de croissance d'interface, percolation de premier ou dernier passage, systèmes de particules en interaction, et bien d'autres modèles. La construction du paysage dirigé s'appuie sur une étonnante propriété d'isométrie de la correspondance de Robinson–Schensted–Knuth. Après avoir expliqué les motivations physiques, nous verrons pourquoi et comment cette isométrie intervient dans la construction, et nous discuterons de quelques-unes des remarquables propriétés du paysage dirigé.

Olivier Benoist. — *Smoothing low-dimensional algebraic cycles [after Kollár and Voisin]*

Let X be a smooth projective complex algebraic variety. An old question of Borel and Haefliger asks whether any (possibly singular) algebraic subvariety of X is homologically equivalent to a linear combination with integral coefficients of smooth algebraic subvarieties of X . In general, this question is too optimistic, and counterexamples have been known for a long time. The aim of this talk is to explain how János Kollár and Claire Voisin have provided a positive answer to Borel and Haefliger's question, for subvarieties of dimension less than half the dimension of X .

Michael Harris. — *Valeurs critiques des fonctions L de puissances symétriques de formes modulaires [d'après S.-Y. Chen]*

Suite à des travaux de Shimura et d'autres, Deligne a énoncé une conjecture reliant les valeurs de fonctions L des motifs sur \mathbb{Q} en certains points entiers à des périodes d'intégrales de formes différentielles algébriques sur les classes d'homologie rationnelle. Cette conjecture a été le point de départ d'une série de conjectures de plus en plus précises sur les valeurs exactes des fonctions L motiviques aux points entiers, et il existe une vaste littérature traitant de nombreux exemples de ces conjectures en utilisant les méthodes

de la théorie des formes automorphes. Cependant, l'une des familles d'exemples qui ont motivé la conjecture initiale de Deligne — le cas des puissances symétriques des motifs attachés aux formes modulaires classiques — est restée inaccessible pendant plus de 40 ans. Dans un travail remarquable récent, Shih-Yu Chen a résolu cette conjecture pour les formes modulaires de poids au moins 5. J'expliquerai les grandes lignes de l'argument de Chen, d'une virtuosité encyclopédique quant aux méthodes mises en jeu et développées par les spécialistes — y compris par Chen lui-même — depuis la parution de l'article où Deligne énonce sa conjecture. Une généralisation des résultats récents de Harder et Raghuram sur la cohomologie d'Eisenstein joue un rôle central dans la démonstration de Chen.

Yuval Wigderson. — *Upper bounds on diagonal Ramsey numbers* [after Campos, Griffiths, Morris, and Sahasrabudhe]

Ramsey's theorem states that if N is sufficiently large, then no matter how one colors the edges among N vertices with two colors, there are always k vertices spanning edges in only one color. Given this theorem, it is natural to ask "how large is sufficiently large?" Ramsey's original proof showed that $N = k!$ is sufficient, and five years later Erdős and Szekeres improved this bound to $N = 4^k$. And then progress stalled for almost 90 years.

In this survey, I present the history of the problem, and discuss some of the ideas used in the recent breakthrough of Campos–Griffiths–Morris–Sahasrabudhe, who proved that $N = 3.993^k$ is sufficient. In addition, I discuss the subsequent work of Balister, Bollobás, Campos, Griffiths, Hurley, Morris, Sahasrabudhe, and Tiba, who gave an alternative, and more conceptual, proof.

Martin Hairer. — *Probabilistic interpretation of quantum field theories* [after Guillarmou, Kupiainen, Rhodes, Vargas...]

We will report on a series of recent results by Guillarmou, Kupiainen, Rhodes and others on the probabilistic construction of the 2D Liouville quantum field theories. We will cover Segal's axioms and their probabilistic implementation in the context of the free field. If time permits, we will discuss the kind of problems arising when constructing interacting field theories, as well as the link to conformal field theories and the Virasoro algebra.

Pierre Pansu. — *Théorie de l'homotopie quantitative* [d'après Guth, Manin, Weinberger...]

Le but de la théorie de l'homotopie, en topologie, c'est de simplifier, après déformation continue, des applications continues entre espaces topologiques. Ce qui empêche de le faire, ce sont des invariants homotopiques. Cela soulève des questions quantitatives :

- Le calcul des invariants est-il possible (décidable) ? Si oui, à quel coût ?
- Construire des représentants de faible complexité et dont les valeurs des invariants sont prescrites est-il possible ? Si oui, à quel coût ?

— Quelle est la complexité des déformations nécessaires ?

Les réponses, souvent récentes, sont d'une grande diversité. En outre, bien des questions restent ouvertes, montrant que la topologie n'a pas dit son dernier mot, même en basses dimensions.

Isabelle Tristani. — *Estimations a priori uniformes pour l'équation de Landau [d'après Nestor Guillen et Luis Silvestre]*

L'équation de Landau (1936) permet de modéliser les collisions entre particules chargées dans un plasma. Cette équation peut être considérée mathématiquement pour une large gamme de potentiels d'interaction mais le seul cas pertinent physiquement est celui correspondant à un potentiel de Coulomb. Il s'agit d'un cas limite de l'équation de Boltzmann pour potentiel coulombien. La version homogène en espace de l'équation de Landau–Coulomb a reçu une attention importante depuis de nombreuses années. Des travaux ont permis de développer une théorie de Cauchy de solutions (très) faibles pour cette équation. Des résultats de régularité partielle ou conditionnelle, d'existence en temps court ont également été obtenus plus ou moins récemment mais la question de l'existence globale de solutions fortes est restée ouverte jusqu'au travail récent de Guillen et Silvestre. Dans ce papier, les auteurs prouvent que l'information de Fisher est décroissante le long du flot de solutions, ce qui leur permet en particulier de prouver que les solutions de l'équation de Landau–Coulomb n'explodent jamais.

Nikolay Tzvetkov. — *Spectral theory of nonlocal operators and infinite dimensional integrable systems [after P. Gérard, S. Grellier, T. Kappeler and P. Topalov]*

The so-called inverse spectral method was used in the years 1970 to give precise information on the long time behaviour for several partial differential equations such as the KdV equation. In these works the spectral problem was a local one and reduced to fine analysis of ordinary differential equations. It was a longstanding open problem to perform the inverse spectral method for equations presenting nonlocal spectral problems. This problem was recently solved in the context of the Benjamin-Ono equation. In this talk, we will present these developments together with the closely related analysis of the so-called cubic Szegő equation.

Raphaël Côte. — *Soliton resolution for energy critical wave type equations [after Duyckaerts–Kenig–Merle and Jendrej–Lawrie]*

The soliton resolution conjecture is a general statement, supported by extensive numerics, which gives a rough picture of the long time dynamics for nonlinear dispersive evolution PDEs. It asserts that, at least generically, solutions behave for large time as the sum of decoupled solitons. Solitons are very specific and rigid solutions: depending on the context, they can be travelling waves or stationary solutions minimal in some sense. One of the great success of the inverse scattering transform was the proof of the soliton resolution for some integrable equations like the Korteweg–de

Vries equation. I will report on important progress made recently on this conjecture regarding wave type equations which are energy critical (and not integrable), with works by Duyckaerts–Kenig–Merle and their collaborators, and by Jendrej–Lawrie.

Claire Debord. — *Hypoellipticité de polynômes de champs de vecteurs et conjectures de Helffer et Nourrigat [d’après I. Androulidakis, O. Mohsen, R. Yuncken]*

On étudie ici la géométrie sous-riemannienne sur une variété M induite par une famille finie F de champs de vecteurs satisfaisant la condition de Hörmander, ainsi que les opérateurs différentiels obtenus comme polynômes en les éléments de F . Un tel opérateur D est hypoelliptique si, pour toute fonction lisse f , les solutions u de l’équation $Du = f$ sont elles aussi lisses. Une notion plus fine, celle des opérateurs hypoelliptiques maximaux, étend cette propriété en termes de régularité Sobolev, offrant un parallèle, en géométrie sous-riemannienne, aux opérateurs elliptiques.

En 1979, Helffer et Nourrigat ont proposé une conjecture caractérisant l’hypoellipticité maximale, généralisant le théorème principal de régularité des opérateurs elliptiques. Cette conjecture a été récemment confirmée grâce à des outils de géométrie non commutative. Un élément central de ce travail est une généralisation naturelle en géométrie sous-riemannienne, introduite par Mohsen, du groupoïde tangent de Connes, dans lequel apparaissent tous les cônes tangents, ingrédients clés dans le travail de Helffer et Nourrigat. En collaboration avec Androulidakis et Yuncken, Mohsen a développé un calcul pseudodifférentiel dans ce contexte, introduisant notamment la notion de symbole principal. Ils obtiennent que l’inversibilité de ce symbole équivaut à l’hypoellipticité maximale, validant ainsi la conjecture.

Cet exposé présentera les ingrédients et les grandes lignes de ces avancées novatrices.

Javier Fresán. — *Moments of L -functions and homological stability [after Bergström–Diaconu–Petersen–Westerland and Miller–Patz–Petersen–Randal-Williams]*

A fundamental question in analytic number theory is to understand the distribution of the central values of a family of L -functions, for example $L(\frac{1}{2}, \chi)$ when χ varies among all quadratic Dirichlet characters. In this case, a conjecture of Conrey–Farmer–Keating–Rubinstein–Snaith predicts the asymptotic behaviour of their moments. I will present recent works by Bergström–Diaconu–Petersen–Westerland and Miller–Patz–Petersen–Randal-Williams establishing the analogue of this conjecture over function fields. In this context, the Grothendieck–Lefschetz trace formula reduces the study of the moments to that of the cohomology of a moduli space of hyperelliptic curves with coefficients in a local symplectic system, and it is then a question of proving a homological stability theorem in the same style as Mumford’s conjecture (the Madsen–Weiss theorem) for the moduli space of all curves. I will explain the main lines of the algebraic topology arguments that allow this to be done, in particular the role of “scanning maps”.

Wee Teck Gan. — *Relative Langlands duality [after Ben-Zvi, Sakellaridis, and Venkatesh]*

We shall discuss a recent work of Ben-Zvi, Sakellaridis, and Venkatesh which proposes a new paradigm for the relative Langlands program. The relative Langlands program is traditionally associated with the study of period integrals of automorphic forms and their relation to analytic properties of L -functions. An earlier work of Sakellaridis and Venkatesh had proposed that the framework for this study should be that of spherical varieties. Ben-Zvi, Sakellaridis, and Venkatesh propose a larger framework for the relative Langlands program, that of hyperspherical varieties, which is a class of symplectic varieties with a Hamiltonian group action. With this larger framework, they envision a duality operation on hyperspherical varieties which explains many examples and phenomena already studied in the literature. This purported duality is partially motivated by a duality of boundary conditions induced by the S -duality of $4d$ topological quantum field theories, via its connection with the geometric Langlands duality.

Ana Caraiani. — *The geometrization of local Langlands [after L. Fargues and P. Scholze]*

The Langlands program is an intricate network of conjectures that connect different areas of mathematics, such as number theory, algebraic geometry, and representation theory. There are several flavours of the Langlands program: local and global, arithmetic and geometric. Traditionally, the arithmetic Langlands program, in the setting of p -adic fields and number fields, has not been able to benefit from the flexibility available in other, more geometric settings.

In this talk, we give an overview of the recent work of Fargues and Scholze, which gives a geometrization of the local Langlands correspondence and which works in particular for p -adic fields. One concrete outcome of this work is a general construction of semi-simple local Langlands parameters attached to irreducible smooth representations of p -adic groups.

In fact, the work of Fargues and Scholze gives much more than this construction, by introducing powerful new techniques and structures from the geometric Langlands program to this setting. The key geometric object underlying this work is the moduli stack of vector bundles (or, more generally, G -bundles) on the Fargues–Fontaine curve. We will describe the geometry of this space, its connection to the representation theory of p -adic groups, and give a flavour of the additional structures it allows us to access.

To give a sense of the tremendous impact that the work of Fargues and Scholze has already had on the field, we will end by mentioning a few striking applications that have been developed by various researchers since then: to the representation theory of p -adic groups and to the cohomology of local and global Shimura varieties.

Antoine Chambert-Loir. — *La logique continue des corps globalement valués*

Un corps globalement valué est un corps muni d'une famille de valeurs absolues satisfaisant à une formule du produit. Les corps de nombres ou les corps de fonctions d'une variable fournissent des exemples classiques, et fondamentaux, d'une

telle structure algébrique; la théorie de Nevanlinna permet de construire une telle structure sur le corps des fonctions méromorphes sur \mathbb{C} . Ces corps globalement valués peuvent être abordés dans le cadre de la logique continue (pour laquelle les prédicats sont à valeurs réelles), et une telle étude a été entreprise par Ben Yaacov et Hrushovski il y a presque 10 ans, fournissant un cadre modèle-théorique pour la théorie diophantienne des hauteurs. Un des premiers résultats fondamentaux de la théorie affirme que le corps des nombres algébriques, avec sa structure (essentiellement unique) de corps globalement valué, est existentiellement clos : tout système d'égalités et inégalités polynomiales et d'inégalités strictes entre hauteurs possède une solution en nombres algébriques, pourvu qu'il en possède une dans une extension globalement valuée. La démonstration, due à Szachniewicz, s'inspire de celle proposée par Ben Yaacov et Hrushovski dans le cas des corps de fonctions : alors que cette dernière utilisait de manière cruciale la description par Boucksom, Demailly, Păun et Peternell du cône des courbes mobiles dans une variété projective, le cas des corps de nombres repose sur des résultats récents de théorie d'Arakelov.

Frédéric Déglise. — *Motivic homotopy theory and stable homotopy groups [after Morel–Voevodsky, Isaksen–Wang–Xu...]*

As early as 1924, Lefschetz proposed applying the methods of the nascent algebraic topology (Poincaré's *Analysis situs*) to algebraic geometry. At the end of the twentieth century, Voevodsky renewed this theme in his thesis, and developed with Morel the \mathbb{A}^1 -homotopy theory, also called motivic homotopy since it offers a framework encompassing the theory of motivic complexes conceived by Beilinson. Since its spectacular application to the Milnor and the Bloch–Kato conjectures, the theory has enjoyed undiminished success, seeing a wealth of developments: vector bundles (Murthy conjecture), algebraic cobordism, motivic Galois groups, Chow–Witt groups and quadratic enumerative geometry...

The developments in \mathbb{A}^1 -homotopy have been particularly driven by the analogy with classical homotopy and the adaptation of its methods. However, Morel's work on the homotopy of the motivic sphere and Voevodsky's results on Steenrod operations in motivic cohomology show that, in return, the \mathbb{A}^1 -homotopy literally brings an additional depth to the topology. More recently, work initiated by Morel and Dugger–Isaksen has shown how to exploit this extra dimension to obtain new results in classical homotopy. In particular, these advances made it possible to make progress on the calculation of stable homotopy groups and have contributed to the resolution of the Kervaire invariant problem by Lin, Wang and Xu.

The talk will present the techniques used to achieve these results, highlighting the interactions between classical and motivic homotopies as well as their recent applications.

LE PAYSAGE DIRIGÉ

[d'après Duncan Dauvergne, Janosch Ortmann et Bálint Virág]

par Guillaume Barraquand

1. Introduction

Soit \mathcal{S}_n le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On dit que $\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_L)$ est une sous-suite croissante de σ si $i_1 < \dots < i_L$ et $\sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_L)$. Notons $L_n(\sigma)$ l'entier maximal L pour lequel il existe une sous-suite croissante de longueur L . Lorsque σ est choisie au hasard uniformément dans \mathcal{S}_n , et que n tend vers l'infini, comment se comporte $L_n(\sigma)$, la longueur de la plus longue sous-suite croissante? ULAM (1961) fut le premier à poser cette question. En s'appuyant sur des simulations numériques, il conjectura qu'il existe une constante c telle que

$$\frac{\mathbb{E}[L_n(\sigma)]}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c.$$

L'existence de la limite fut démontrée rigoureusement une dizaine d'années plus tard par HAMMERSLEY (1972). Quant à la valeur de la constante, on sait que $c = 2$ depuis les travaux de LOGAN et SHEPP (1977) et de VERSHIK et KEROV (1977). La question de la loi des fluctuations de $L_n(\sigma)$ autour de la moyenne a été résolue vingt ans plus tard par BAIK, DEIFT et JOHANSSON (1999). Les fluctuations sont d'ordre $n^{1/6}$ et ne sont pas gaussiennes, mais

$$\frac{L_n(\sigma) - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}}$$

converge vers la distribution de Tracy–Widom, introduite pour décrire les fluctuations de la plus grande valeur propre de matrices aléatoires hermitiennes (TRACY et WIDOM, 1994). La preuve de ce résultat, qui est particulièrement élégante, a débouché sur de nombreux développements mathématiques, constituant même un nouveau sous-domaine des probabilités : les *probabilités intégrables*.

Au-delà de la plus longue sous-suite croissante, on peut aussi s'intéresser au comportement de la, ou des, plus longues sous-suites croissantes $\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_L)$. Puisque