

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DYNAMICS OF SEVERAL RIGID BODIES IN A TWO-DIMENSIONAL IDEAL FLUID AND CONVERGENCE TO VORTEX SYSTEMS

Olivier Glass & Franck Sueur

Tome 154
Fascicule 1

2026

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

pages 1-106

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel
de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 154, mars 2026

Comité de rédaction

Boris ADAMCZEWSKI
Valeria BANICA
Julie DÉSERTI
Gabriel DOSPINESCU
Dorothee FREY

Youness LAMZOURI
Wendy LOWEN
Ludovic RIFFORD
Erwan ROUSSEAU
Béatrice de TILIÈRE

François DAHMANI (Dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
commandes@smf.emath.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 50 € (\$ 75)

Abonnement électronique : 175 € (\$ 262),

avec supplément papier : Europe 266 €, hors Europe 307 € (\$ 460)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Bulletin de la SMF

Bulletin de la Société Mathématique de France

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 1 44 27 67 99 • Fax : (33) 1 40 46 90 96

bulletin@smf.emath.fr • smf.emath.fr

© Société Mathématique de France 2026

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directrice de la publication : Isabelle GALLAGHER

**DYNAMICS OF SEVERAL RIGID BODIES
IN A TWO-DIMENSIONAL IDEAL FLUID
AND CONVERGENCE TO VORTEX SYSTEMS**

BY OLIVIER GLASS & FRANCK SUEUR

ABSTRACT. — We consider the motion of several solids in a bounded cavity filled with a perfect incompressible fluid, in two dimensions. The solids move according to Newton's law, under the influence of the fluid's pressure. On the other hand the fluid dynamics is driven by the 2D incompressible Euler equations, which are set on the time-dependent domain corresponding to the cavity deprived of the sets occupied by the solids. We assume that the fluid vorticity is initially bounded and that the circulations around the solids may be non-zero. The existence of a unique corresponding solution, *à la Yudovich*, to this system, up to a possible collision, follows from the arguments in [10]. The main result of this paper is to identify the limit dynamics of the system when the radius of some of the solids converge to zero, in different regimes, depending on how, for each body, the inertia is scaled with the radius. We obtain in the limit some point vortex systems for the solids converging to particles and a form of Newton's law

Texte reçu le 6 avril 2022, modifié le 11 octobre 2024, accepté le 4 novembre 2024.

OLIVIER GLASS, CEREMADE, UMR CNRS 7534, Université Paris-Dauphine, PSL, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France • *E-mail* : glass@ceremade.dauphine.fr

FRANCK SUEUR, Department of Mathematics, Maison du nombre, 6 avenue de la Fonte, University of Luxembourg, L-4364 Esch-sur-Alzette, Luxembourg • *E-mail* : franck.sueur@uni.lu

Mathematical subject classification (2010). — 35Q31, 35Q70, 76D27.

Key words and phrases. — fluid–solid interactions, incompressible perfect fluid, vortex-wave system.

The authors were partially supported by the Agence Nationale de la Recherche, Project IFSMACS, grant ANR-15-CE40-0010 and Project SINGFLOWS, grant ANR-18-CE40-0027-01. F.S. was also partially supported by the Agence Nationale de la Recherche, Project BORDS, grant ANR-16-CE40-0027-01 and Project BOURGEONS, grant ANR-23-CE40-0014-01, the Conseil Régionale d'Aquitaine, grant 2015.1047.CP, the Del Duca Foundation, and the H2020-MSCA-ITN-2017 program, Project ConFlex, Grant ETN-765579.

for the solids that have a fixed radius; for the fluid we obtain a Euler-type system. This extends the earlier work [7], which deals with the case of a single small heavy body immersed in an incompressible perfect fluid occupying the rest of the plane, [8], which deals with the case of a single small light body immersed in an incompressible perfect fluid occupying the rest of the plane, and [9], which deals with the case of a single small, heavy or light, body immersed in a irrotational incompressible perfect fluid occupying a bounded plane domain.

In particular, we consider for the first time the case of several small rigid bodies, for which the strategy of the previous papers cannot be adapted straightforwardly, despite the partial results recently obtained in [6]. The main difficulty is to understand the interaction, through the fluid, between several moving solids. A crucial point of our strategy is the use of normal forms of the ODEs driving the motion of the solids in a two-steps process. First we use a normal form for the system coupling the time evolution of all the solids to obtain a rough estimate of the acceleration of the bodies. Then we turn to some normal forms that are specific to each small solid, with an appropriate modulation related to the influence of the other solids and of the fluid vorticity. Thanks to these individual normal forms we obtain some precise uniform *a priori* estimates of the velocities of the bodies and then pass to the limit. In the course of this process, we make use of another new main ingredient of this paper, which is an estimate of the fluid velocity with respect to the solids, uniformly with respect to their positions and radii, and which can be seen as a refinement of the reflection method for a div/curl system with prescribed circulations.

RÉSUMÉ (*Dynamique de plusieurs corps solides dans un fluide parfait bi-dimensionnel et convergence vers le système des points vortex*). — Nous considérons le mouvement de plusieurs corps rigides dans une cavité remplie d'un fluide parfait incompressible en deux dimensions. Les corps rigides se déplacent selon les lois de Newton, sous l'influence de la pression du fluide. La dynamique du fluide est régie par les équations d'Euler incompressible 2D, qui sont posées sur le domaine, qui dépend du temps, correspondant à la cavité privée des domaines occupés par les solides. Nous supposons que la vorticité du fluide est initialement bornée et les circulations autour des solides peuvent être non nulles. L'existence d'une unique solution à la Yudovich, tant qu'il n'y a pas de collision, découle des arguments donnés dans [10]. Le résultat principal du papier est d'identifier les dynamiques limites du système quand le rayon de certains des solides converge vers zéro, avec différents régimes, selon, pour chaque solide, le ratio de son inertie avec son rayon. Nous obtenons à la limite des systèmes de point vortex pour les solides convergeant vers des particules ponctuelles, une loi de type Newton pour les solides qui gardent leur rayon fixé et un système du type Euler incompressible pour le fluide. Ceci étend les travaux précédents: [7], qui traite le cas d'un seul corps solide, de rayon tendant vers zéro avec une masse positive fixée, immergé dans un fluide parfait incompressible occupant le reste du plan, [8], qui traite le cas d'un seul corps solide, dont le rayon et la masse tendent vers zéro avec une corrélation naturelle, immergé dans un fluide parfait incompressible occupant le reste du plan, et [9] qui traite du cas d'un seul corps solide, dans les deux régimes d'inertie précédents, immergé dans un fluide parfait incompressible occupant un domaine plan borné.

En particulier nous considérons pour la première fois le cas de plusieurs petits corps solides, pour lequel la stratégie des papiers précédents ne semble pas s'adapter facilement, malgré les résultats obtenus dans [6] dans le cas de solides de taille fixe. La difficulté principale est de comprendre l'interaction, par le biais du fluide, entre les différents solides. Un point crucial de notre stratégie est l'utilisation de formes normales pour les EDOs donnant la dynamique des solides dans une approche en deux temps.

En premier lieu nous utilisons une forme normale pour le système couplant l'évolution en temps de tous les solides pour obtenir une estimation grossière de l'accélération des solides. Ensuite nous établissons des formes normales spécifiques à chaque solide, avec une modulation appropriée reliée à l'influence des autres solides et de la vorticité du fluide. Grâce à ces formes normales individuelles nous obtenons des estimées uniformes précises des vitesses des solides, et passons à la limite. Au cours de ce processus, nous établissons une estimée de la vitesse du fluide due aux solides, uniformément par rapport à leurs positions et rayons, qui peut être considérée comme un raffinement de la méthode des réflexions pour un système div/curl avec circulations prescrites.

1. Introduction and statement of the main result

1.1. The fluid–solid system. — The general situation that we describe is that of N solids immersed in a bounded domain of the plane. The total domain (containing the fluid and the solids) is denoted by Ω , which is a nonempty bounded open connected set in \mathbb{R}^2 , with smooth boundary. In the domain Ω there are N solids $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_N$ embedded, which are nonempty, simply connected, and closed sets with smooth boundaries. To simplify, we assume that Ω is simply connected and that the solids $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_N$ are not disks (though in the general case they could be treated similarly). Their positions depend on time, so we will denote them $\mathcal{S}_1(t), \dots, \mathcal{S}_N(t)$. Since they are rigid bodies, each solid $\mathcal{S}_\kappa(t)$ is obtained through a rigid movement from $\mathcal{S}_\kappa(0)$. The rest of the domain, occupied by the fluid, will be denoted by $\mathcal{F}(t)$, so that

$$\mathcal{F}(t) = \Omega \setminus (\mathcal{S}_1(t) \cup \dots \cup \mathcal{S}_N(t)).$$

We will systematically suppose the solids to be at positive distance one from another and from the outer boundary $\partial\Omega$ during the whole time interval:

$$(1.1) \quad \forall t, \quad \forall \kappa \in \{1, \dots, N\}, \quad \mathcal{S}_\kappa(t) \subset \Omega, \quad \text{dist}(\mathcal{S}_\kappa(t), \partial\Omega) > 0 \\ \text{and } \forall \lambda \neq \kappa, \quad \text{dist}(\mathcal{S}_\kappa(t), \mathcal{S}_\lambda(t)) > 0.$$

Let us now describe the dynamics of the fluid and of the solids.

Dynamics of the fluid. The fluid is supposed to be inviscid and incompressible, and, consequently, driven by the incompressible Euler equation. We denote $u = u(t, x)$ the velocity field (with values in \mathbb{R}^2) and $\pi = \pi(t, x)$ the (scalar) pressure field, both defined for t in some time interval $[0, T]$ and $x \in \mathcal{F}(t)$. The incompressible Euler equation reads

$$(1.2) \quad \begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla\pi = 0, \\ \text{div } u = 0, \end{cases} \quad \text{for } t \in [0, T], \quad x \in \mathcal{F}(t).$$