

(φ, Γ) -MODULES ET REPRÉSENTATIONS DU MIRABOLIQUE DE $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

par

Pierre Colmez

Résumé. — On construit des foncteurs $D \mapsto D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$, de la catégorie des (φ, Γ) -modules étales dans celle des représentations du mirabolique de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Dans le cas du (φ, Γ) -module trivial, le module $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ s'interprète naturellement comme l'espace des mesures bornées sur $\mathbf{Q}_p$. En traduisant, en termes de (φ, Γ) -modules, les opérations élémentaires sur les mesures (multiplication par une fonction continue, image directe par un difféomorphisme local), on munit le module $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ d'opérations analytiques. Toutes ces constructions jouent un grand rôle dans l'établissement de la correspondance de Langlands locale p -adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Enfin, on démontre une loi de réciprocité explicite qui généralise celle de Perrin-Riou et intervient dans l'exploration des liens entre les correspondances de Langlands locales p -adique et classique (pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$).

Abstract (*(φ, Γ) -modules and representations of the mirabolic of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$*). — This paper is devoted to the construction of functors $D \mapsto D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ and $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ from the category of étale (φ, Γ) -modules to that of representations of the mirabolic subgroup of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. If D is the trivial (φ, Γ) -module, $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ is naturally isomorphic to the space of bounded measures on $\mathbf{Q}_p$. Translating in terms of (φ, Γ) -modules the usual operations on measures (multiplication by a continuous function, pushforward by a local diffeomorphism) endow $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ with analytic operations. All these constructions play an important rôle in the definition of the p -adic local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Finally, we prove an explicit reciprocity law generalizing that of Perrin-Riou, which is used in the comparison between the classical and p -adic local Langlands correspondences (for $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$).

Introduction

Notations générales. — On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{Q}_p$, et on note $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ de $\mathbf{Q}_p$. On note $\chi : \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p} \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique ; il induit un isomorphisme de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathbf{Z}_p^*$. Si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, on note $\sigma_a \in \Gamma$ l'élément défini par $\chi(\sigma_a) = a$. On note $\mathcal{H}$ le noyau de χ et $\mathcal{H}'$ le

Classification mathématique par sujets (2010). — 11S**.

Mots clefs. — (φ, Γ) -modules, loi de réciprocité.

groupe de Galois absolu de l'extension abélienne maximale de $\mathbf{Q}_p$ (on a $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$). Enfin, soit $\Gamma^{\text{nr}} = \text{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\text{nr}}/\mathbf{Q}_p)$. Alors $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathcal{H}'$ est l'abélianisé $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\text{ab}}$ de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$, les groupes Γ et Γ^{nr} s'identifient aux sous-groupes de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\text{ab}}$ fixant $\mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$ et $\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ respectivement, et $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\text{ab}} = \Gamma \times \Gamma^{\text{nr}}$.

On fixe⁽¹⁾ aussi une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$, et on note $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ l'anneau des séries de Laurent $f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$, à coefficients dans $\mathcal{O}_L$ et vérifiant $\lim_{k \rightarrow -\infty} a_k = 0$. On note $k_{\mathcal{E}} = k_L((T))$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}[\frac{1}{p}]$ son corps des fractions. Enfin, on note $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ le sous-anneau $\mathcal{O}_L[[T]]$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et $k_{\mathcal{E}}^+ = k_L[[T]]$ l'anneau des entiers de $k_{\mathcal{E}}$, et on pose $\mathcal{E}^+ = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+[\frac{1}{p}]$.

On munit $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$, $k_{\mathcal{E}}$, $k_{\mathcal{E}}^+$ et $\mathcal{E}$ d'actions $\mathcal{O}_L$ -linéaires continues de Γ et du Frobenius φ , respectant les structures d'anneaux, en envoyant T sur $\varphi(T) = (1+T)^p - 1$ et $\sigma_a(T) = (1+T)^a - 1$, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$. Ces actions commutent entre elles.

On rappelle que :

- la transformée d'Amice $\mu \mapsto A_\mu = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \mu$ induit un isomorphisme $\mathcal{D}_0(\mathbf{Z}_p, L) \cong \mathcal{E}^+$ où $\mathcal{D}_0(\mathbf{Z}_p, L)$ est l'espace des L -mesures sur $\mathbf{Z}_p$ (i.e. le dual de l'espace $\mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ des fonctions continues sur $\mathbf{Z}_p$).
- l'application $f \mapsto \phi_f$ induit un isomorphisme $\mathcal{E}/\mathcal{E}^+ \cong \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$, où $\phi_f(x)$ est, si $x \in \mathbf{Z}_p$, le résidu en 0 de la forme différentielle $(1+T)^x f(T) \frac{dT}{1+T}$,

Cadre général. — On dispose, grâce à Fontaine [17], d'une équivalence de catégories entre les (φ, Γ) -modules étales et les représentations p -adiques de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Dans cet article, on construit un certain nombre de foncteurs associant à un (φ, Γ) -module étale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ ou sur $\mathcal{E}$ des objets de nature diverse. En vue de la correspondance de Langlands locale p -adique, les foncteurs les plus importants sont les foncteurs $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ (pour un (φ, Γ) -module étale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$) et $D \mapsto (D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ (pour un (φ, Γ) -module étale sur $\mathcal{E}$) associant à un (φ, Γ) -module étale une représentation du mirabolique $P(\mathbf{Q}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbf{Q}_p^*, b \in \mathbf{Q}_p \right\}$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Si V est une L -représentation irréductible de dimension 2 de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et si D et Π sont respectivement le (φ, Γ) -module et la représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ qui lui sont associés, alors $(\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$, où $\check{D}$ est le dual de Tate de D , est naturellement isomorphe, en tant que représentation de $P(\mathbf{Q}_p)$, au dual de Π . Les th. 0.4 et 0.6 ci-dessous, dont des cas particuliers peuvent se trouver dans [3, 4, 12] permettent respectivement de montrer que Π est irréductible et que la correspondance $V \mapsto \Pi$ est injective.

Les foncteurs $D \mapsto D^\natural$ et $D \mapsto D^\natural$. — La construction du foncteur $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et son étude passent par l'introduction d'un certain nombre de foncteurs intermédiaires

⁽¹⁾ On se permet parfois de remplacer L par une extension finie ; L est donc variablement fixe...

qui ont leur intérêt propre. La plupart des résultats de ce paragraphe étaient connus de Fontaine⁽²⁾ ([18], non rédigé).

Construction de sous-modules d'un (φ, Γ) -module. — Un (φ, Γ) -module étale est muni d'un opérateur ψ (dans la théorie des équations différentielles p -adiques, cet opérateur est « le ψ de Dwork »), qui est un inverse à gauche de φ et commute à l'action de Γ . Cet opérateur joue un grand rôle dans l'étude [20, 21], via les (φ, Γ) -modules, de la cohomologie galoisienne des représentations p -adiques de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$; en particulier, le module $D^{\psi=1}$ est, d'après un résultat de Fontaine (non publié mais voir [7]), naturellement isomorphe au module d'Iwasawa intervenant dans la construction des fonctions L p -adiques à la Perrin-Riou.

Si D est un (φ, Γ) -module étale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, on définit ses sous- $\mathcal{O}_L$ -modules suivants :

- $D^+ = \{z \in D, (\varphi^n(z))_{n \in \mathbf{N}} \text{ est bornée dans } D\}$,
- $D^{++} = \{z \in D, \varphi^n(z) \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty\}$,
- D^{nr} l'intersection des $\varphi^n(D)$, pour $n \in \mathbf{N}$,
- $D^{\natural}$ le plus petit sous- $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ -module compact de D stable par ψ et engendrant D ,
- $D^{\sharp}$ le plus grand sous- $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ -module compact de D stable par ψ , sur lequel ψ est surjectif.

Si D est un (φ, Γ) -module étale sur $\mathcal{E}$, on définit les L -espaces vectoriels D^+ , D^{++} et D^{nr} comme ci-dessus, et pour définir $D^{\natural}$ et $D^{\sharp}$, on remplace « sous- $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ -module compact » par « sous- $\mathcal{E}^+$ -module localement compact », ce qui revient à choisir un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -réseau Δ de D stable par φ et Γ et à poser $D^{\sharp} = L \otimes_{\mathcal{O}_L} \Delta^{\sharp}$ et $D^{\natural} = L \otimes_{\mathcal{O}_L} \Delta^{\natural}$. (On a aussi $D^+ = L \otimes_{\mathcal{O}_L} \Delta^+$, $D^{++} = L \otimes_{\mathcal{O}_L} \Delta^{++}$ et $D^{\text{nr}} = L \otimes_{\mathcal{O}_L} \Delta^{\text{nr}}$.)

Le module trivial. — Si $D = \mathcal{E}$, on a $D^+ = D^{\natural} = \mathcal{E}^+$, $D^{++} = T\mathcal{E}^+$, $D^{\text{nr}} = L$ et $D^{\sharp} = T^{-1}\mathcal{E}^+$. Comme $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}/\mathcal{E}^+$ s'identifient respectivement aux espaces $\mathcal{D}_0(\mathbf{Z}_p, L)$ des mesures sur $\mathbf{Z}_p$ et $\mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ des fonctions continues sur $\mathbf{Z}_p$, on voit que D^+ et $D/D^{\natural}$ sont en dualité dans le cas du module trivial.

Principales propriétés. — L'opérateur φ a tendance à augmenter les dénominateurs en T (sur $k_{\mathcal{E}}$, il les multiplie par p puisque $\varphi(T) = T^p$ modulo p), et son inverse à gauche ψ a tendance à les diminuer, ce qui explique pas mal des propriétés des modules définis ci-dessus.

– On a les inclusions $D^{++} \subset D^+ \subset D^{\natural} \subset D^{\sharp}$.

– On a $D^+ = D^{\text{nr}} \oplus D^{++}$. Par ailleurs, si V est la représentation de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ associée à D via l'équivalence de catégories de Fontaine, alors

$$D^{\text{nr}} = (W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathcal{H}} = (W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes_{\mathbf{Z}_p} V^{\mathcal{H}'})^{\Gamma^{\text{nr}}}.$$

⁽²⁾ Je lui dois en particulier l'énoncé du (i) du th. 0.1.

On en déduit que D^{nr} est petit⁽³⁾ : si D est un (φ, Γ) -module sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, alors $\dim_{k_L}(k_L \otimes_{\mathcal{O}_L} D^{\text{nr}}) \leq \dim_{k_{\mathcal{E}}}(k_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D)$, et si D est un (φ, Γ) -module sur $\mathcal{E}$, alors $\dim_L D^{\text{nr}} \leq \dim_{\mathcal{E}} D$.

– Si D est de torsion sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, alors D^{++} , D^+ , $D^{\natural}$ et $D^{\sharp}$ sont ouverts dans D . Par contre, si D est un (φ, Γ) -module sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, sans torsion, ou sur $\mathcal{E}$, alors D^{++} et D^+ sont, en général, nuls⁽⁴⁾, tandis que $D^{\natural}$ et $D^{\sharp}$ sont assez gros pour engendrer D .

– Comme on le voit sur l'exemple $D = \mathcal{E}$, un élément de $D^{\sharp}$ a peu de dénominateurs en T ; c'est dû au fait que ψ diminue les dénominateurs en T . Une des propriétés fondamentales de $D^{\sharp}$ est que l'action de ψ sur $D/D^{\sharp}$ est topologiquement nilpotente ; autrement dit, si D est de torsion, et si $x \in D$, alors $\psi^n(x) \in D^{\sharp}$, pour tout n assez grand. On voit aussi, sur cet exemple, que $D^{\sharp}/D^{\natural}$ est relativement petit, ce qui s'avère extrêmement précieux pour beaucoup de questions, le module le plus intéressant étant $D^{\natural}$, et celui le plus facile à manier étant $D^{\sharp}$ grâce à la propriété ci-dessus.

– Les modules ci-dessus sont tous stables par Γ . Les foncteurs qu'ils définissent n'ont pas de très bonnes propriétés d'exactitude. Le seul résultat non immédiat sur la définition est la surjectivité des applications $D_1^{\sharp} \rightarrow D_2^{\sharp}$ et $D_1^{\natural} \rightarrow D_2^{\natural}$ si $D_1 \rightarrow D_2$ est un morphisme surjectif de (φ, Γ) -modules.

Dualité. — Si D est un (φ, Γ) -module, on note $\check{D}$ son dual de Tate ; c'est un (φ, Γ) -module qui, en tant que $\mathcal{O}_L$ -module, est naturellement isomorphe au dual topologique de D . L'opérateur ψ sur $\check{D}$ est alors l'adjoint de φ sur D , ce qui est à la base de la définition [21], en termes de (φ, Γ) -modules, de la dualité locale pour la cohomologie galoisienne. Le dual de Tate de $\check{D}$ est naturellement isomorphe à D .

Théorème 0.1. — *Soit D un (φ, Γ) -module de torsion.*

- (i) D^+ et $\check{D}^{\natural}$ sont exactement orthogonaux ainsi que D^{++} et $\check{D}^{\sharp}$.
- (ii) $\check{D}^{\sharp}$, $D^{\natural}$ et $\check{D}^{\sharp}/\check{D}^{\natural}$ sont les duaux respectifs de D/D^{++} , D/D^+ et D^{nr} .

Ce résultat ne s'étend pas aux (φ, Γ) -modules qui ne sont pas de torsion, mais on a quand même le résultat suivant dont on déduit que $D^{\sharp}/D^{\natural}$ est toujours assez petit (et même en général nul, si D est un (φ, Γ) -module sur $\mathcal{E}$).

Corollaire 0.2. — (i) *Si D est un (φ, Γ) -module sur $\mathcal{E}$, alors $\check{D}^{\sharp}/\check{D}^{\natural}$ est le dual de D^{nr} .*
(ii) *Si D est un (φ, Γ) -module sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, alors $\check{D}^{\sharp}/\check{D}^{\natural}$ est le dual de $((\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) \otimes D)^{\text{nr}}$.*

⁽³⁾ Si D est irréductible, de dimension ≥ 2 sur $\mathcal{E}$, alors $V^{\mathcal{H}'} = 0$ et D^{nr} est plus que petit : il est nul !

⁽⁴⁾ Si D^+ engendre D , on dit que D est de hauteur finie (notion introduite dans [17], et étudiée dans [2, 9, 26] ; voir en particulier le th. D de [2]).

Construction de représentations du mirabolique. — Soit P le sous-groupe mirabolique de $\mathbf{GL}_2$. On a donc $P(\mathbf{Q}_p) = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P(\mathbf{Z}_p) = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Généralités. — Soit M un $\mathcal{O}_L$ -module muni d'une action de $P(\mathbf{Z}_p)$ et d'un opérateur surjectif ψ commutant à $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et vérifiant $\psi\left(\begin{pmatrix} 1 & pb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z\right) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \psi(z)$, pour tous $z \in M$ et $b \in \mathbf{Z}_p$. Notons $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ l'ensemble des suites⁽⁵⁾ $(x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de M , telles que $\psi(x^{(n+1)}) = x^{(n)}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. On montre alors facilement que les formules suivantes définissent une action de $P(\mathbf{Q}_p)$ sur $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$:

- (a) si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, alors $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} = (y^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$, avec $y^{(n)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$;
- (b) si $k \in \mathbf{Z}$, alors $\begin{pmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} = (y^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$, avec $y^{(n)} = x^{(n+k)}$, pour tout $n \geq -k$;
- (c) si $b \in \mathbf{Q}_p$, alors $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} = (y^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$, avec $y^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & p^n b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x^{(n)}$, pour tout $n \geq -v_p(b)$.

Si M est un L -espace vectoriel muni d'un $\mathcal{O}_L$ -réseau M_0 stable par $P(\mathbf{Z}_p)$ et ψ , on note $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ le sous- L -espace vectoriel $L \otimes_{\mathcal{O}_L} (M_0 \boxtimes \mathbf{Q}_p)$ de $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

Supposons que M est muni d'une action du semi-groupe $P^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^{-\{0\}} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et pas seulement de $P(\mathbf{Z}_p)$, telle que ψ soit un inverse à gauche de $\varphi = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que les opérateurs $\text{Res}_{i+p\mathbf{Z}_p} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \varphi \circ \psi \circ \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour $i \in \{0, \dots, p-1\}$, qui sont des projecteurs, soient orthogonaux deux à deux et que leur somme soit l'identité. Alors on peut définir, pour tout ouvert compact U de $\mathbf{Q}_p$, un sous-module $M \boxtimes U$ de $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et une application de restriction à U qui est un projecteur $\text{Res}_U : M \boxtimes \mathbf{Q}_p \rightarrow M \boxtimes U$ vérifiant les propriétés suggérées par la notation (cf. exemple des mesures sur $\mathbf{Q}_p$ ci-dessous). Dans ce cas, M s'identifie à $M \boxtimes \mathbf{Z}_p$ de (via $x \mapsto (\varphi^n(x))_{n \in \mathbf{N}}$) et, via cette identification, $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ devient l'application $(x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} \mapsto x^{(0)}$.

Si M est un L -espace vectoriel, alors $M \boxtimes U \subset (M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$, pour tout ouvert compact U de $\mathbf{Q}_p$.

Mesures sur $\mathbf{Q}_p$. — Si $M = \mathcal{D}_0(\mathbf{Z}_p, L)$, et si ψ est défini par $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi \psi(\mu) = \int_{p\mathbf{Z}_p} \phi\left(\frac{x}{p}\right) \mu$, alors $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est l'espace des mesures sur $\mathbf{Q}_p$ (i.e. le dual de l'espace $\mathcal{C}^0(\mathbf{Q}_p, L)_c$ des fonctions continues à support compact) muni de l'action de $P(\mathbf{Q}_p)$ définie par $\int_{\mathbf{Q}_p} \phi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mu = \int_{\mathbf{Q}_p} \phi(ax+b) \mu$. L'espace $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ est, quant à lui, l'espace $\mathcal{D}_0(\mathbf{Q}_p, L)$ des mesures bornées⁽⁶⁾ sur $\mathbf{Q}_p$ qui est le dual de l'espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.

⁽⁵⁾ Notons que la connaissance des $x^{(n)}$, pour $n \gg 0$, permet de reconstruire $x^{(n)}$ pour tout n en itérant ψ .

⁽⁶⁾ Une mesure bornée sur $\mathbf{Q}_p$ est la même chose qu'une distribution globalement d'ordre 0 (cf. [13, n° II.5]).