BULLETIN DE LA S. M. F.

RÉMI LANGEVIN
FÉLIX PRZYTYCKI

# Entropie de l'image inverse d'une application

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 120, nº 2 (1992), p. 237-250
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1992__120_2_237_0>

*Bull. Soc. math. France,*
120, 1992, p. 237–250.

# ENTROPIE DE L'IMAGE INVERSE D'UNE APPLICATION

PAR

RÉMI LANGEVIN et FÉLIX PRZYTYCKI (*)

RESUME. — Nous montrons que l'entropie de la relation image inverse d'une application rationnelle de la sphère de Riemann ou d'une application monotone par morceaux de l'intervalle est nulle. Nous donnons aussi un exemple d'application dont l'image inverse à une entropie plus grande que celle de l'application de départ, répondant à une question de J. PALIS.

ABSTRACT. — We show that the entropy of the relation inverse to a rational map of the riemann sphere or to a piecewise monotone map of the interval is zero. We give also an exemple of map the inverse image of which has entropy bigger than the entropy of the map itself, answering a question of J. PALIS.

## 1. Introduction

L'entropie topologique d'une application mesure comment les itérées d'une application éloignent des points initialement proches. De même qu'une application, une relation peut être itérée.

Soit donc $R$ une relation définie sur un espace $X$ muni d'une métrique $d$, compact pour la toplogie définie par cette métrique.

*Définitions* :

- $R(x) = \{y \in X \mid x\, R\, y\}$.
- $R(A) = \bigcup_{x \in A} R(x)$.
- Une relation $R$ est *compacte* si, pour tout compact $A$, l'ensemble $R(A)$ est compact.

(*) Texte reçu le 5 mars 1991

R. LANGEVIN, Université de Bourgogne, Dépt. de Mathématiques, B.P. 138, 21004 Dijon Cedex, France.

F. PRZYTYCKI, Instytut matematyczny, Polskiej Akademii Nauk, Ul. Sniadeckich 8 skrylka Pocztowa Nr 27, 00-950 Warszawa, Pologne.

Classification AMS : 58F23.

• La relation $f^{-1}$, image inverse de l'application $f$, est définie par : $xf^{-1}y$ si $x = f(y)$.

*Remarque.* — L'application $f^{-1}$ est compacte si l'application $f$ est propre.

Rappelons maintenant la définition de l'entropie d'une relation (cf. [L-W]). Cette définition a été suscitée par l'étude des feuilletages (cf. [G-L-W]). Le lecteur trouvera sans doute les notations plus naturelles en pensant à la relation $R_{\mathcal{F}}$ : être sur la même feuille de $\mathfrak{F}$, et être contenus dans une boule de rayon 1 pour la métrique induite sur cette feuille.

Nous supposerons ici que la relation $R$ est compacte.

*Définitions* :

• La relation $R_n$ , $n$-ième *itérée* de $R$, est définie par $R_0 = \mathrm{Id}$, $x\ R_n\ y$ s'il existe une chaîne $(x, x_1, \dots, x_n = y)$, telle que $x\ R\ x_1\ R\ \cdots\ R\ x_n$.

• $T_n(x)$, le $n$-ième *arbre* de $x$, est l'espace des chaînes $\alpha = (x, x_1, ..., x_j)$ de longueur $j \leq n$, satisfaisant $x\ R\ x_1\ R\ \cdots\ R\ x_j$.

• Notons $T(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n(x)$.

• Notons $p$ l'application qui supprime le dernier maillon d'une chaîne $\alpha = (x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ soit $p(\alpha) = (x, x_1, \dots, x_{n-1})$.

• $L_n(x) = \bigcup_{j\leq n} R_j(x)$.

• La *feuille* de $x$, $L(x)$, est définie par :

$$L(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n(x).$$

Donnons encore quelques définitions utiles pour manipuler les chaînes.

*Définitions* :

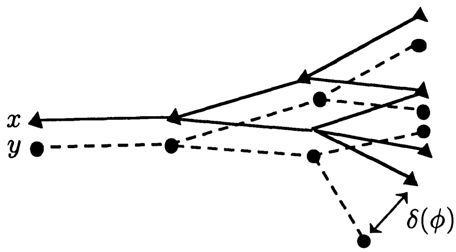
• L'application fin $: T_n(x) \mapsto X$ est définie par $\mathrm{fin}(x, x_1, ..., x_j) = x_j$.

• Une application $\phi$ de $T(x)$ dans $X$ est *bien enchaînée* si

$$\phi\big(p(\alpha)\big)\ R\ \phi(\alpha).$$

• Le *déplacement* $\delta(\phi)$ d'une application $\phi$ de l'arbre $T_n(\phi)$ dans une feuille $L(y)$ qui envoie la chaîne $(x)$ sur le point $y$ est définie par :

$$\delta(\phi) = \sup_{\alpha\in T_n(x)} d\big(\mathrm{fin}(\alpha), \phi(\alpha)\big)$$




Ceci, plagiant la définition de l'entropie topologique d'une application, nous permet de définir sur $X$ une suite d'écarts :

$$d_n(x,y) = \inf_{\phi\in\Omega(x,y)} \delta(\phi) + \inf_{\phi\in\Omega(y,x)} \delta(\phi)$$

où $\Omega(x,y)$ est l'ensemble des applications bien enchainées de $T_n(x)$ dans $L(y)$ qui envoient $(x)$ sur $y$. Nous pouvons maintenant définir des ensembles $(n,\varepsilon,\mathfrak{U})$ générateurs par : $A \subset \mathfrak{U}$ est $(n,\varepsilon\mathfrak{U})$-générateur si :

$$\forall\, z \in \mathfrak{U},\ \exists\, x_i \in A \ \text{ tel que } \ d(z,x_i) \le \varepsilon.$$

Soit $N_R(n,\varepsilon,\mathfrak{U}) = \inf \operatorname{card}(A\ (n,\varepsilon,\mathfrak{U})\text{-générateur})$.

Définissons enfin l'entropie $h(R)$ de la relation $R$ par :

*Définition.*

$$h(R) = \inf_{\varepsilon>0} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} N_R(n,\varepsilon,\mathfrak{U}).$$

Il a été démontré dans [L-W] que l'entropie de la relation image inverse d'une application de classe $C^1$ par morceaux, expansive, de l'intervalle est nulle. On trouvera aussi dans [L-W] des exemples de relations d'entropie non nulle. Nous montrerons ici les résultats suivants :

PROPOSITION (dimension 1 réelle). — *Soit $f : I \to I$ une transformation de l'intervalle continue par morceaux et monotone par morceaux. L'entropie de la relation image inverse est nulle.*

Récemment Z. NITECKI et le second auteur ont montré ce résultat pour toute application continue de l'intervalle. Voir [N-P].

THÉORÈME (dimension 1 complexe). — *Soit $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ une application rationnelle de la sphère de Riemann dans elle-même. L'entropie de la relation image inverse est nulle.*

Nous donnerons une démonstration détaillée du théorème, bien que la plupart des idées nécessaires à la preuve puissent être tirées des articles [Ly1] et [Ly2] de LYUBITCH ; voir aussi [P].

La situation est très différente en dimension plus grande que 1. Il existe dès la dimension réelle 2 des homéomorphismes d'entropie non nulle. L'homéomorphisme inverse a dans ce cas la même entropie. Nous construirons ici un exemple de transformation $f$ de $S^2$ satisfaisant :

$$h(f^{-1}) > h(f).$$

Nous remercions J. PALIS pour de fructueuses conversations pendant l'élaboration de ce travail.

## 2. Démonstrations

Démontrons d'abord la proposition.

Soit $F$ la réunion d'un réseau fini de points de l'intervalle $I$ au moins $\frac{1}{2}\varepsilon$ proches, des points de discontinuité de $f$, des points de retour de $f$ (points au voisinage desquels $f$ n'est pas monotone), et des extrémités de $I$. Soit $N_F$ le nombre de points de $F$ et soit

$$F(n) = F \cup f(F) \cup \cdots \cup f^n(F).$$

Si $x$ et $y$ sont deux points appartenant à un même intervalle de $I \setminus F(n)$, les arbres $T_n(x)$ et $T_n(y)$ sont naturellement isomorphes et deux chaînes analogues $\alpha$ et $\alpha'$ de ces deux arbres satisfont $d(\mathrm{fin}(\alpha), \mathrm{fin}(\alpha')) < \frac{1}{2}\varepsilon$, puisque $\mathrm{fin}(\alpha)$ et $\mathrm{fin}(\alpha')$ appartiennent au même intervalle de $I \setminus F$. On en déduit que le nombre de points d'un ensemble $(n, \varepsilon)$-séparé est inférieur ou égal au nombre d'intervalles de $I \setminus F(n)$, donc à $nN$, ce qui montre que l'entropie de $f^{-1}$ est nulle.

Commençons maintenant la démonstration du théorème.

Notons $\mathrm{Crit}(f)$ l'ensemble des points critiques de $f$ et posons

$$\mathrm{Crit}(n) = \bigcup_{j=1}^{n} f^n\big(\mathrm{Crit}(f)\big), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Notons encore CritPer l'ensemble des points périodiques ayant un point critique dans leur orbite. Nous allons séparement chercher un $(\varepsilon, n)$-réseau (ensemble $(\varepsilon, n)$-générateur) loin de $\mathrm{Crit}(n)$, près de $\mathrm{Crit}(n) \setminus \mathrm{CritPer}$ et près de CritPer.

Pour chaque entier $n$, définissons la famille $\mathfrak{D}_n$ des disques $B(x, r)$ de la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ centrés en un point $x$ de $\mathbb{C}$, de rayon $r$ positif, et tel que $B(x, 2r) \cap \mathrm{Crit}(n) = \emptyset$.