

# Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

**Numéro 125/126**  
**Nouvelle série**

**CHAMPS DE HURWITZ**

**J. BERTIN & M. ROMAGNY**

**2 0 1 1**

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

---

*Comité de rédaction*

|                          |                     |
|--------------------------|---------------------|
| Jean BARGE               | Charles FAVRE       |
| Emmanuel BREUILLARD      | Daniel HUYBRECHTS   |
| Gérard BESSON            | Yves LE JAN         |
| Antoine CHAMBERT-LOIR    | Laure SAINT-RAYMOND |
| Jean-François DAT        | Wilhem SCHLAG       |
| Raphaël KRIKORIAN (dir.) |                     |

*Diffusion*

|                         |                          |                     |
|-------------------------|--------------------------|---------------------|
| Maison de la SMF        | Hindustan Book Agency    | AMS                 |
| Case 916 - Luminy       | O-131, The Shopping Mall | P.O. Box 6248       |
| 13288 Marseille Cedex 9 | Arjun Marg, DLF Phase 1  | Providence RI 02940 |
| France                  | Gurgaon 122002, Haryana  | USA                 |
| smf@smf.univ-mrs.fr     | Inde                     | www.ams.org         |

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 50 € (\$ 75)  
*Abonnement* Europe : 255 €, hors Europe : 290 € (\$ 435)  
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat : Nathalie Christiaën*

Mémoires de la SMF  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96  
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2011

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0249-633-X  
ISBN 978-85629-333-1

Directrice de la publication : Aline BONAMI

---

# CHAMPS DE HURWITZ

José Bertin  
Matthieu Romagny

*J. Bertin*

Institut Fourier, Université Grenoble 1, France.

*E-mail* : jose.bertin@ujf-grenoble.fr

*M. Romagny*

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 6, France.

*E-mail* : romagny@math.jussieu.fr

---

***Classification mathématique par sujets (2000).*** – 14H10, 14H30, 14H37, 14A20, 14C17; 11G20, 11G30, 14C40.

***Mots-clefs.*** – Courbe algébrique, revêtement, revêtement galoisien, champ de Hurwitz, compactification, structure de niveau, Riemann-Hurwitz, revêtement cyclique, classes tautologiques.

---

Nous remercions les organisateurs de la semaine thématique *Groupes de Galois arithmétiques et différentiels* au CIRM (Luminy) en Mars 2004, durant laquelle plusieurs exposés furent consacrés aux espaces de Hurwitz, et qui a servi de point de départ à la présente rédaction. Même si la gestation de ce travail a été lente, et peut-être à cause de cela, nous avons bénéficié d’incitations et sollicitations répétées de nombreux collègues. Nous tenons à les remercier tous pour leur patience et leur bienveillance. Enfin, nous remercions les rapporteurs, dont les nombreuses remarques ont permis d’améliorer grandement la qualité de ce travail.

# CHAMPS DE HURWITZ

José Bertin, Matthieu Romagny

**Résumé.** – Dans ce travail, nous effectuons une étude détaillée des champs de Hurwitz et de leurs espaces de modules, tant dans le cas galoisien que dans le cas non galoisien, avec une attention particulière portée aux correspondances entre ces espaces de modules. Nous comparons notre construction à celles proposées par Abramovich-Corti-Vistoli, Harris-Mumford, et Mochizuki-Wewers. Nous mettons en application nos résultats pour revisiter des exemples classiques, notamment les champs de courbes stables munies d’une structure de niveau arbitraire, et les champs de revêtements cycliques modérément ramifiés. Dans une deuxième partie, nous mettons en évidence des fibrés tautologiques et des classes de cohomologie qui vivent naturellement sur les champs de Hurwitz, et nous donnons des relations universelles, dont un analogue supérieur de la formule de Riemann-Hurwitz, entre ces classes. Nous donnons des applications au champ des revêtements cycliques de la droite projective, avec un intérêt particulier pour des relations du type de la relation de Cornalba-Harris et pour les intégrales de Hodge cycliques, notamment hyperelliptiques.

**Abstract (Hurwitz stacks).** – In this work, we give a thorough study of Hurwitz stacks and associated Hurwitz moduli spaces, both in the Galois and the non Galois case, with particular attention to correspondances between these moduli spaces. We compare our construction to those proposed by Abramovich-Corti-Vistoli, Harris-Mumford, and Mochizuki-Wewers. We apply our results to revisit some classical examples, particularly the stacks of stable curves equipped with an arbitrary level structure, and the stacks of tamely ramified cyclic covers. In a second part we exhibit some tautological bundles and cohomology classes naturally living on Hurwitz stacks, and give some universal relations, in particular a higher analogue of the Riemann-Hurwitz formula, between these classes. Applications are given to the stack of cyclic covers of the projective line, with special attention to Cornalba-Harris type relations and to cyclic, in particular hyperelliptic, Hodge integrals.



# TABLE DES MATIÈRES

|                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>1. Introduction</b>                                                            | 9  |
| Conventions et Notations                                                          | 13 |
| <b>2. Classification des revêtements</b>                                          | 15 |
| 2.1. Actions de groupes et revêtements                                            | 15 |
| 2.1.1. Revêtements, $G$ -courbes, $G$ -revêtements                                | 15 |
| 2.1.2. Classification des revêtements                                             | 16 |
| 2.2. Donnée de Hurwitz                                                            | 18 |
| 2.2.1. Donnée de Hurwitz : Définition                                             | 18 |
| 2.2.2. Opérations sur les données de Hurwitz                                      | 19 |
| 2.3. Nombre de Nielsen                                                            | 21 |
| 2.3.1. Classification topologique                                                 | 21 |
| 2.3.2. Nombre de Nielsen                                                          | 23 |
| <b>3. Familles de <math>G</math>-courbes lisses et Théorème de Chevalley-Weil</b> | 29 |
| 3.1. Géométrie du diviseur de branchement                                         | 29 |
| 3.1.1. Diviseurs de points fixes                                                  | 29 |
| 3.1.2. Ramification et branchement                                                | 31 |
| 3.2. Inversion de la formule de Chevalley-Weil                                    | 33 |
| 3.2.1. Formule de Chevalley-Weil                                                  | 34 |
| 3.2.2. Inversion des relations de Chevalley-Weil                                  | 36 |
| <b>4. Familles de <math>G</math>-courbes stables</b>                              | 41 |
| 4.1. Actions stables, revêtements stables                                         | 41 |
| 4.1.1. Courbes stables et stables marquées                                        | 41 |
| 4.1.2. Actions stables                                                            | 43 |
| 4.1.3. Collision des points de branchement : étude locale                         | 49 |
| 4.1.4. Géométrie du quotient par une action stable                                | 51 |
| 4.2. Collision des points de ramification                                         | 52 |
| 4.2.1. $G$ -type d'un $G$ -diviseur                                               | 52 |
| 4.2.2. Chevalley-Weil (bis repetita)                                              | 53 |
| 4.3. Courbes stables marquées et actions de groupes                               | 57 |
| <b>5. Déformations des revêtements modérément ramifiés</b>                        | 61 |

|                                                                                           |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.1. Déformations équivariantes des courbes .....                                         | 61         |
| 5.1.1. La déformation universelle .....                                                   | 61         |
| 5.1.2. Stabilité de la courbe quotient .....                                              | 66         |
| 5.1.3. Déformations équivariantes versus déformations du diviseur de<br>branchement ..... | 68         |
| 5.2. Modèle stable marqué d'un $G$ -revêtement .....                                      | 69         |
| <b>6. Champs de Hurwitz .....</b>                                                         | <b>75</b>  |
| 6.1. $G$ -champs et champs quotients .....                                                | 75         |
| 6.1.1. Quotient d'un champ par une action de groupe .....                                 | 76         |
| 6.1.2. 2-quotient ou rigidification .....                                                 | 80         |
| 6.2. Champs de Hurwitz : cas galoisien .....                                              | 81         |
| 6.2.1. Définition des champs de Hurwitz .....                                             | 81         |
| 6.2.2. Fonctorialité des champs de Hurwitz .....                                          | 83         |
| 6.3. Compactification stable du champ de Hurwitz (I) .....                                | 84         |
| 6.4. Compactification du schéma de Hurwitz : Gieseker-Mumford .....                       | 86         |
| 6.5. Compactification stable du champ de Hurwitz (II) .....                               | 88         |
| 6.5.1. Le champ de Hurwitz versus Harris-Mumford .....                                    | 88         |
| 6.5.2. Le revêtement « universel » .....                                                  | 91         |
| 6.6. Champs de Hurwitz : cas non galoisien .....                                          | 93         |
| 6.6.1. Revêtements admissibles .....                                                      | 93         |
| 6.6.2. Clôture galoisienne : cas des courbes lisses .....                                 | 94         |
| 6.6.3. Clôture galoisienne : courbes stables .....                                        | 98         |
| 6.6.4. Le morphisme discriminant : cas général .....                                      | 103        |
| <b>7. Graphes et revêtements .....</b>                                                    | <b>107</b> |
| 7.1. Graphes modulaires de Hurwitz .....                                                  | 107        |
| 7.2. Graphes de groupes et revêtements de graphes .....                                   | 109        |
| 7.2.1. Graphes modulaires quotients .....                                                 | 109        |
| 7.2.2. Un exemple : le bord du schéma de Hurwitz « classique » .....                      | 113        |
| 7.2.3. Revêtements ramifiés de graphes .....                                              | 116        |
| 7.3. Groupe de Picard et revêtements .....                                                | 118        |
| 7.3.1. Sous-groupes de décomposition et d'inertie .....                                   | 118        |
| 7.3.2. Faisceaux sans torsion de rang 1 et revêtements stables .....                      | 121        |
| 7.4. Stratification canonique du bord .....                                               | 125        |
| 7.4.1. Stratification du bord .....                                                       | 125        |
| 7.4.2. Type topologique d'un point du bord .....                                          | 130        |
| <b>8. Structures de niveau sur les courbes stables .....</b>                              | <b>133</b> |
| 8.1. Structures de niveau sur les courbes lisses .....                                    | 133        |
| 8.2. Structures de niveau sur les courbes stables .....                                   | 136        |
| 8.3. Le niveau abélien ( $n$ ) .....                                                      | 139        |
| 8.3.1. Groupes de décomposition et d'inertie .....                                        | 139        |
| 8.3.2. Composantes irréductibles du bord .....                                            | 141        |

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>9. Revêtements cycliques</b>                                                   | 149 |
| 9.1. Revêtements cycliques versus racines d'un faisceau inversible                | 149 |
| 9.1.1. Racines et quasi-racines d'un faisceau inversible                          | 149 |
| 9.1.2. Description des revêtements cycliques                                      | 150 |
| 9.2. Revêtements cycliques stables                                                | 153 |
| 9.2.1. Revêtements cycliques stables et quasi-racines d'un faisceau<br>inversible | 153 |
| 9.2.2. Composantes irréductibles du bord                                          | 157 |
| 9.3. Revêtements cycliques de $\mathbb{P}^1$                                      | 159 |
| 9.3.1. Quelques calculs de torseurs                                               | 159 |
| 9.3.2. Interlude : Géométrie du discriminant des formes binaires                  | 162 |
| 9.3.3. Le champ des revêtements cycliques de la droite projective                 | 166 |
| <b>10. Classes tautologiques</b>                                                  | 169 |
| 10.1. Fibré de Hodge                                                              | 169 |
| 10.1.1. $G$ -fibrés vectoriels sur le champ de Hurwitz                            | 169 |
| 10.1.2. Décomposition du fibré de Hodge                                           | 172 |
| 10.2. Les fibrés en droites $\psi_{i,x}$ et $\mu_{i,v}$                           | 176 |
| 10.3. Relations de Riemann-Hurwitz d'ordre supérieur                              | 178 |
| 10.3.1. Calculs dans l'anneau de Chow                                             | 178 |
| 10.3.2. Relations de Riemann-Hurwitz d'ordre supérieur                            | 181 |
| 10.3.3. Faisceaux inversibles associés aux composantes du bord                    | 184 |
| 10.4. Appliquer le théorème de Riemann-Roch                                       | 188 |
| 10.4.1. Mise en place du théorème de Grothendieck-Riemann-Roch (GRR)              | 188 |
| 10.4.2. Termes de bord                                                            | 192 |
| 10.5. La relation de Cornalba-Harris revisitée                                    | 201 |
| 10.5.1. Les faisceaux inversibles $\psi$ et $\mu$ dans le cas cyclique            | 201 |
| 10.5.2. Relation de Cornalba-Harris                                               | 202 |
| 10.5.3. Intégrales de Hodge-Hurwitz hyperelliptiques                              | 206 |
| <b>Index</b>                                                                      | 211 |
| <b>Bibliographie</b>                                                              | 213 |

