Séminaires & Congrès
12, 2005, p. 179–213

THÉORÈME STÉPHANOIS ET MÉTHODE DES PENTES

par

Philippe Graftieaux

***Résumé.* —** Ce travail porte sur la conjecture de Mahler-Manin, démontrée en 1996 par Barré *et al.*, et dont l'énoncé est le suivant : la fonction analytique dont le développement de Laurent est donné par le développement de Fourier à l'infini de la fonction modulaire prend des valeurs transcendantes en tout nombre algébrique. On donne de ce résultat une preuve plus intrinsèque que la preuve originale, en utilisant d'une part le formalisme de la méthode des pentes de Bost, qui consiste à utiliser la géométrie d'Arakelov dans une preuve de nature transcendante, et d'autre part la modularité grâce à l'emploi de la hauteur de Faltings.

***Abstract* (The Mahler-Manin conjecture and the slope method). —** In this work, we are interested in the Mahler-Manin conjecture, proved in 1996 by Barré *et al.* This theorem asserts that the analytic function whose Laurent series is given by the Fourier series of the modular function takes transcendental values on algebraic numbers. We give for this statement a proof that is more intrinsic that the original one, using the slope theory of Bost, consisting of using Arakelov geometry in transcendence proofs, as well as modularity, using Faltings' height.

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 11J91, 14G40.
***Mots clefs.* —** Fonction modulaire, transcendance, géométrie d'Arakelov, méthode des pentes, hauteur de Faltings.

1. Introduction

1.1. La conjecture de Mahler-Manin. — Considérons la fonction modulaire $\tau \mapsto j(\tau)$. Elle est définie sur le demi-plan $\mathfrak{H}$ de Poincaré et admet un développement en série de Laurent à l'infini :

$$j(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + \sum_{n \geqslant 0} c(n) q^n, \quad \text{où } q = \exp(2i\pi\tau).$$

Ce développement définit une fonction analytique $q \mapsto J(q)$ sur le disque unité du plan complexe privé de l'origine. La conjecture de Mahler-Manin a été énoncée en 1969 [**6**] dans le cas archimédien, puis en 1971 [**8**] dans le cas p-adique. Elle a été démontrée en 1996 par Barré, Diaz, Gramain et Philibert [**1**], est connue depuis sous le nom de *théorème stéphanois*, et s'énonce comme suit ; précisons que par nombre algébrique (resp. transcendant) nous entendons un nombre algébrique (resp. transcendant) sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Soit q un nombre complexe (resp. un élément de $\mathbb{C}_p$) non nul vérifiant $|q| < 1$ (resp. $|q|_p < 1$). Si q est algébrique, alors $J(q)$ est transcendant.

Notons que ce résultat a été généralisé par Nesterenko (voir le texte de V. Bosser dans ce volume, voir aussi les revues [**16**] et [**4**]). Dans ce texte, nous ne nous intéressons qu'au cas complexe du théorème. On peut alors paraphraser l'énoncé en termes de périodes de courbes elliptiques de la façon suivante :

Soit E une courbe elliptique définie sur un corps de nombres. Le tore complexe $E(\mathbb{C})$ n'est pas analytiquement isomorphe au quotient de $\mathbb{C}$ par le réseau engendré par les logarithmes d'un nombre algébrique.

En effet, la courbe elliptique E est définie sur un corps de nombres si et seulement si son invariant $j(E)$ est algébrique, c'est-à-dire si et seulement si pour tout nombre complexe τ appartenant au demi-plan de Poincaré et vérifiant $j(\tau) = j(E)$, le nombre complexe $q = \exp(2i\pi\tau)$ est tel que $J(q)$ est algébrique. Par ailleurs, le tore $E(\mathbb{C})$ est analytiquement isomorphe au quotient de $\mathbb{C}$ par le réseau $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, ou encore par le réseau $2i\pi\mathbb{Z} + 2i\pi\tau\mathbb{Z}$ qui n'est autre que le réseau engendré par les logarithmes de q.

1.2. La preuve stéphanoise. — La démonstration exposée dans [**1**] utilise les ingrédients suivants :

(i) L'attirail standard des preuves de transcendance : théorie des hauteurs sur les corps de nombres, lemme de Siegel, lemme de Schwarz avec facteurs de Blaschke, inégalité de Cauchy.

(ii) Une estimation de la hauteur et du degré de $J(q^S)$ en fonction de ceux de $J(q)$ lorsque $J(q)$ est un nombre algébrique et S est un entier. Ceci est fait à l'aide du polynôme modulaire Φ_S satisfaisant à la relation $\Phi_S(J(q), J(q^S)) = 0$, dont on sait depuis Mahler [**7**] estimer le degré et les coefficients.

(iii) Une propriété assez fine du développement en série de Fourier de la fonction j, à savoir une borne pour la croissance de ses coefficients, due également à Mahler [**7**].

Nous pouvons ébaucher la preuve comme suit. Supposons qu'il existe un nombre complexe q tel que $0 < |q| < 1$ et tel que q et $J(q)$ soient algébriques.

Premier pas. — Pour tout couple (N, D) d'entiers tels que $N \geqslant 2D^2$, on construit par le lemme de Siegel un polynôme de deux variables à coefficients entiers $P(X, Y)$, de degré $\leqslant D$ et de coefficients contrôlés en fonction de N et D, tel que la fonction $F\colon z \mapsto F(z) = P(z, zJ(z))$ ait un zéro d'ordre supérieur à N à l'origine. Or, du fait de la propriété d'invariance de $\tau \mapsto j(\tau)$, la série formelle $J(T)$ est transcendante sur le corps $\mathbb{Q}(T)$. Par conséquent, la fonction holomorphe non nulle F a un zéro d'ordre fini $M \geqslant N$ en $z = 0$.

Deuxième pas. — À l'aide de l'estimation des coefficients de P et de celle des coefficients de Fourier de j, on majore $F(z)$ en fonction de $|z|$, M et D.

Troisième pas. — Soit S le plus petit entier tel que $F(q^S)$ soit non nul. Le deuxième pas, associé à un lemme de Schwarz avec produits de Blaschke, permet de majorer S en fonction de M et D.

Quatrième pas. — L'hypothèse d'algébricité de q et $J(q)$, associée aux estimations de Mahler sur le polynôme modulaire Φ_S et à la borne obtenue pour les coefficients de P, permet d'appliquer l'inégalité de Liouville et de minorer $|F(q^S)|$ en fonction de S, N et D.

Cinquième pas. — À l'aide de la majoration de S obtenue au troisième pas et l'inégalité $M \geqslant N$, on choisit les paramètres N et D de sorte que la majoration du deuxième pas (avec $z = q^S$) soit incompatible avec la minoration du quatrième pas.

1.3. Objet et structure du présent texte.— Notre but est de donner au théorème stéphanois une preuve aussi géométrique et intrinsèque que possible utilisant la méthode des pentes. En général, l'apport d'une telle démonstration pour une preuve de transcendance est de dégager les ingrédients de nature géométrique, arithmétique et analytique, et donc d'ouvrir la voie à des généralisations naturelles. On espère aussi mieux comprendre en quoi exactement intervient la modularité dans le théorème stéphanois et faire un pas vers des résultats nouveaux où la modularité entrerait en jeu de manière analogue.

On reformulera donc dans un langage géométrique les points (i) et (ii), qui se prêtent bien à ce type d'exercice. Le point (iii) contient quant à lui une information de nature arithmétique qui est en fait directement reliée aux résultats classiques sur la croissance des coefficients de Fourier des formes modulaires.

La méthode des pentes. — Concernant la partie proprement transcendante (i) de la preuve, nous rappelons la méthode des pentes de J.-B. Bost [**3**], qui présente l'avantage de donner des démonstrations une vision synthétique propice aux généralisations. Cette méthode a été introduite afin de rendre effective la preuve du résultat de D. Masser et G. Wüstholz sur les périodes des variétés abéliennes [**9**], et s'applique théoriquement dans toutes les preuves de transcendance où les outils cités en (i) sont utilisés.

Exprimé grossièrement, le principe consiste à remplacer la construction d'une fonction auxiliaire particulière (par le lemme de Siegel) par l'étude de l'espace vectoriel complexe E de toutes les fonctions auxiliaires possibles. Par ailleurs, on substitue à l'analyse d'un avatar de la fonction auxiliaire (en pratique, souvent une évaluation ou une dérivée) l'étude de l'application qui à une fonction quelconque associe l'objet correspondant. On obtient ainsi une application linéaire $\varphi\colon E \to F$ entre espaces vectoriels complexes. De plus, l'espace d'arrivée est muni d'une filtration (F_i) (en pratique souvent définie par l'ordre d'annulation), de sorte que l'application φ se décompose en une famille d'applications $(\varphi_i\colon E_i \to F_i)$. Lorsque des hypothèses d'algébricité sont satisfaites, les espaces E et F, l'application φ et la filtration (F_i) sont définis sur un corps de nombres K. On peut donc évaluer les normes non-archimédiennes (resp. archimédiennes) des applications φ_i, grâce à la théorie des hauteurs (resp. à l'inégalité de Cauchy et au lemme de Schwarz). On applique alors la théorie des pentes (qui joue pour l'anneau des entiers de K le rôle de la théorie des minima successifs de Minkowski pour l'anneau $\mathbb{Z}$ des nombres entiers) pour obtenir que φ ne peut être injective.

La partie 2 a pour objet les prérequis de géométrie d'Arakelov nécessaires. Dans la partie 3, nous appliquons la méthode des pentes à la situation suivante : nous considérons un germe analytique i, définie localement au voisinage de l'origine $(0, \dots, 0, 1)$ de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ par une famille de séries formelles $(Y_0, \dots, Y_n)$ à coefficients entiers, et une suite de nombres complexes $(z_s)_{s\geqslant 1}$ dont l'image par i est une suite $(A_s)_{s\geqslant 1}$ de points algébriques de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Si l'image de i n'est pas incluse dans une hypersurface de $\mathbb{P}^n$, alors la méthode des pentes fournit une inégalité faisant intervenir la croissance des coefficients des séries $Y_0, \dots, Y_n$, la suite des modules $|z_s|_{s\geqslant 1}$ et celles des hauteurs de Weil $(h(A_s))_{s\geqslant 1}$ et des degrés $(\deg A_s)_{s\geqslant 1}$. Nous obtenons ainsi la proposition 3.1, dont la philosophie est la suivante : si la croissance des coefficients des séries $Y_0, \dots, Y_n$ est modérée, si la suite $|z_s|_{s\geqslant 1}$ tends vers 0 et si les suites $(h(A_s))_{s\geqslant 1}$, $(\deg A_s)_{s\geqslant 1}$ ne croissent pas trop vite, alors l'image de i est incluse dans une hypersurface.

Hauteurs sur l'espace des modules des courbes elliptiques. — Le point (ii) de la preuve est en fait de nature purement géométrique. En effet, si E est une courbe elliptique définie sur un corps de nombres, la hauteur de son invariant modulaire $j(E)$ et sa hauteur de Faltings stable $h_F^{\mathrm{s}}(E)$ sont comparables (et en fait, ces deux fonctions sont toutes deux des hauteurs sur l'espace des modules des courbes elliptiques). Par

suite, pour estimer la hauteur et le degré de $J(q^s)$ en fonction de ceux de $J(q)$ lorsque s est un entier naturel non nul, il suffit de remarquer que la courbe elliptique attachée à q^s est isogène à celle attachée à q par une isogénie de degré s. On est ainsi ramené à étudier le comportement du degré du corps de définition et de la hauteur de Faltings par isogénie, ce qui est bien connu.

Cette reformulation fait l'objet de la partie 4. Son intérêt avait déjà été mentionné en [**1**, p. 7, quatrième pas] et si elle ne modifie en rien l'essence de la preuve, elle présente l'avantage d'être intrinsèque et d'éviter de recourir à des calculs explicites sur le polynôme modulaire.

Preuve du théorème stéphanois. — Dans la partie 5, nous spécialisons la proposition 3.1 prouvé dans la partie 3 en un critère d'algébricité pour un germe analytique $i\colon B(0,1) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ faisant intervenir des bornes précises pour les suites des modules $|z_s|_{s\geqslant 1}$, des hauteurs $(h(A_s))_{s\geqslant 1}$ et des degrés $(\deg A_s)_{s\geqslant 1}$ (théorème 5.1).

On considère alors l'immersion analytique

$$i\colon z \longmapsto (z, z^2, zJ(z))$$

ainsi qu'un nombre algébrique q tel que $J(q)$ est algébrique, et on applique le critère 5.1 à l'immersion i et à la suite de points $(z_s)_{s\geqslant 1} := (q^s)_{s\geqslant 1}$ qui a pour image par i une suite de points algébriques. Comme la conclusion du critère est incompatible avec le fait que la série $J(T)$ est transcendante sur $\mathbb{C}(T)$ (*cf.* lemme 5.2), on aboutit à une contradiction.

Les hypothèses du critère d'algébricité 5.1 que nous devons vérifier sont au nombre de deux et concernent d'une part la croissance de la hauteur et du degré du point algébrique $(1, q^s, J(q^s))$ en fonction de s, qui provient de la partie 4, et d'autre part l'existence d'une uniformisation entière à croissance modérée de l'immersion i. Ce second point peut être traité par le point (iii), conformément au texte original [**1**] ; pour notre part, nous préférons donner suite à une observation de D. Bertrand mentionnée par G. Diaz dans [**4**] et utiliser l'uniformisation $(\Delta(T), T\Delta(T), E_2(T)^3)$ de l'immersion i, où E_2 (resp. Δ) désigne l'unique forme modulaire de poids 4 valant 1 à l'infini (resp. de poids 12 de dérivée 1 à l'infini). La croissance des coefficients est alors contrôlée de façon élémentaire par un calcul direct sur les coefficients de Fourier de E_2 et Δ, ou par le résultat classique de Hecke [**10**, Chap. VII, Th. 5] : *Si f est une forme modulaire de poids $2k$, alors la croissance de ses coefficients de Fourier est au plus polynomiale de degré k.*

2. Initiation à la géométrie d'Arakelov

Les références pour cette partie sont [**3**] et [**14**, exposé 1]. Pour ne pas surcharger le texte, nous choisissons délibérément de ne pas développer la théorie des pentes dans toute sa généralité. En particulier, on ne fait pas mention du polygone canonique, inutile dans le cas qui nous intéresse.