Séminaires & Congrès
12, 2005, p. 215–269

INTRODUCTION AUX FORMES MODULAIRES DE HILBERT ET À LEURS PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES

par

Federico Pellarin

***Résumé.* —** Ce texte constitue une introduction à la théorie des formes modulaires de Hilbert, avec une attention particulière portée aux propriétés différentielles. En guise d'application, nous déterminons la structure de l'anneau des formes modulaires de Hilbert associées au corps $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

***Abstract* (Introduction to the theory of Hilbert modular forms and to their differential properties)**

This text is an introduction to the theory of Hilbert modular forms, with special regard to their differential properties. As an application, we determine the ring structure of Hilbert modular forms associated to the field $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Table des matières

1. Introduction

Pour expliquer les motivations de cette série de six exposés, nous décrivons brièvement un célèbre théorème de Nesterenko (voir [**17**] ainsi que le texte [**4**] de Bosser dans ce volume).

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 11F41, 11F60.
***Mots clefs.* —** Formes modulaires, plusieurs variables complexes, opérateurs différentiels.

Posons $q = e^{2\pi \mathrm{i}\tau}$ avec τ un nombre complexe de partie imaginaire positive (où i désigne le nombre complexe $\sqrt{-1}$). Soient $E_2(q), E_4(q), E_6(q)$ les séries d'Eisenstein usuelles, de poids $2, 4, 6$ respectivement.

Théorème 1.1. — *Si* $0 < |q| < 1$ *alors le sous-corps de* $\mathbb{C}$ *engendré par les nombres complexes* $q, E_2(q), E_4(q), E_6(q)$ *a un degré de transcendance sur* $\mathbb{Q}$ *au moins* 3.

La preuve du théorème 1.1 s'appuie sur certaines propriétés différentielles des séries E_2, E_4, E_6. Tout d'abord, l'opérateur de dérivation $D = q\frac{d}{dq}$ fait de l'anneau $\mathcal{R} := \mathbb{Q}[E_2, E_4, E_6]$ un anneau *différentiel*. Plus précisément, nous avons :

$$\begin{aligned} DE_2 &= \frac{1}{12}(E_2^2 - E_4) \\ DE_4 &= \frac{1}{3}(E_2E_4 - E_6) \\ DE_6 &= \frac{1}{2}(E_2E_6 - E_4^2). \end{aligned} \tag{1}$$

On remarque ensuite que :

$$\mathcal{R} = \mathbb{Q}[E_2, DE_2, D^2E_2]. \tag{2}$$

Ainsi, la forme $E_2(e^{2\pi \mathrm{i}\tau})$, quasi-modulaire de poids 2, engendre l'anneau différentiel $\mathcal{R}$, et en détermine la structure.

Mais cela n'est pas tout. Une propriété fondamentale de l'anneau différentiel $\mathcal{R}$, étudiée et utilisée par Nesterenko pour démontrer le théorème 1.1, est la suivante. On considère :

$$\Delta = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2).$$

Nesterenko démontre que, sous des hypothèses techniques, si $\mathcal{P}$ est un idéal premier non nul de $\mathcal{R}$ tel que pour tout $x \in \mathcal{P}$ on ait $Dx \in \mathcal{P}$, alors $\mathcal{P}$ contient nécessairement Δ (voir [**4**]).

La fonction $\Delta(e^{2\pi \mathrm{i}\tau})$ est une forme parabolique non nulle de poids 12 pour $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ (c'est la forme parabolique de Jacobi). Elle semble regrouper des propriétés essentielles dans la démonstration du théorème 1.1 ; en voici quelques-unes.

Tout d'abord, on a $\Delta(z) = 0$ si et seulement si $z = 0$, la seule valeur pour laquelle le théorème 1.1 est faux. Cette propriété découle de deux faits distincts.

D'une part, $\Delta(z^2)$ est un produit :

$$\Delta(z^2) = 2^{-8}\left(\theta_2(z)\theta_3(z)\theta_4(z)\right)^8, \tag{3}$$

où les θ_i sont des fonctions thêta (définies dans (15)).

D'autre part, les relations (1) impliquent :

$$D\Delta = E_2\Delta. \tag{4}$$

Une autre propriété remarquable, que l'on peut déduire de (1), est que :

$$3456\Delta = [E_6, E_4]_1 := 6E_6(DE_4) - 4E_4(DE_6). \tag{5}$$

L'expression à droite de (5) est un *crochet* de Rankin. Il s'agit d'une variante du Wronskien d'une équation différentielle linéaire.

Ces propriétés constituent le fil conducteur de ces exposés. Nous voulons faire une introduction aux formes modulaires de Hilbert inspirée par ces aspects du théorème 1.1.

1.1. Motivation et structure de ce texte. — Nous commençons par décrire les groupes modulaires de Hilbert et leur action sur les produits de copies de demi-plans supérieurs complexes. Nous faisons ensuite une courte introduction aux formes modulaires de Hilbert, qui sont des formes modulaires de plusieurs variables complexes, associées à des corps de nombres totalement réels : le nombre de variables est égal au degré du corps. Nous construisons des formes modulaires de Hilbert : des séries d'Eisenstein et des séries thêta.

Nous regardons ensuite les zéros de certaines formes modulaires de Hilbert, par analogie avec Δ. La fonction E_2 est égale à la dérivée logarithmique $D\Delta/\Delta$. Grâce à (2), ceci permet de retrouver le système (1).

En deux ou plusieurs variables, nous observons qu'il n'existe pas de forme modulaire de Hilbert sans zéros dans son domaine de définition, ce qui constitue une difficulté dans la construction d'une généralisation du système (1).

De plus, en deux ou plusieurs variables, il existe une division importante entre formes modulaires dites de poids *parallèle* et celles dites de poids *non parallèle*, qui n'existe pas en une variable complexe.

Il s'avère que des généralisations partielles de la forme modulaire Δ de Jacobi en plusieurs variables existent. Nous donnons un exemple explicite en deux variables complexes, lorsque le corps totalement réel est $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$: la forme modulaire ainsi construite, notée χ_5 (de poids $(5,5)$), permettra de calculer explicitement un certain anneau de formes modulaires de Hilbert de deux variables complexes. Cette forme modulaire est un produit de fonctions thêta en analogie avec la formule (3), mais ne satisfait pas de relations analogues à (4) ou (5).

En général, les structures d'anneaux (gradués) des formes modulaires de Hilbert de poids parallèle peuvent être déterminées de plusieurs façons. La méthode la plus ancienne consiste à étudier des séries d'Eisenstein de petit poids (le plus souvent de poids $\underline{1} := (1,\dots,1)$), pour des sous-groupes de congruence, tordues par des caractères de Dirichlet, ou des séries thêta : c'est la méthode introduite par Hecke, avec des contributions de Kloosterman, Götzky, Gundlach, Maass, Resnikoff. Les théorèmes de structure les plus précis concernent uniquement le cas des formes modulaires de Hilbert de deux variables complexes.

Cette méthode a été remplacée ou complétée dans plusieurs cas par l'utilisation de la géométrie des surfaces lorsque Hirzebruch a découvert comment construire explicitement un modèle désingularisé de compactifications de surfaces modulaires de

Hilbert. On a alors pu utiliser la théorie de l'intersection dans les surfaces, et déterminer explicitement des bases d'espaces vectoriels de formes modulaires (vues comme sections de faisceaux inversibles). Le livre de van der Geer [**7**] contient les fondations de cette technique.

Dans ces exposés nous proposons une méthode encore différente, qui est plus dans l'esprit du théorème 1.1, et qui consiste à exploiter les propriétés différentielles des formes modulaires (Jacobi, Rankin, Resnikoff). En étudiant ces propriétés, nous décrivons complètement la structure de l'anneau des formes modulaires de Hilbert de poids parallèle, associées au corps $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Après avoir construit une forme modulaire φ_2 (de poids $(2,2)$), nous montrons que l'anneau des formes modulaires de Hilbert de poids parallèle

$$\mathcal{T}(\Gamma) = \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} M_{r\underline{1}}(\Gamma)$$

pour le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ est un anneau de type fini, dont on peut déterminer explicitement la structure, et est engendré par les images de φ_2, χ_5 par certains opérateurs différentiels que nous décrirons. C'est ici qu'il faudra généraliser (5). En effet, les autres générateurs de $\mathcal{T}(\Gamma)$ sont des formes modulaires χ_6 et $\widetilde{\chi}$, de poids respectifs $(6,6), (15,15)$, mais pour construire $\widetilde{\chi}$, il faudra utiliser un crochet trilinéaire :

$$\widetilde{\chi} = [\chi_6, \varphi_2, \chi_5],$$

et $\widetilde{\chi}$ est l'analogue de Δ en ce qui concerne les expressions (4) ou (5).

En toute autre direction, nous montrons que l'anneau des formes modulaires de Hilbert (de poids quelconque) associé à un corps quadratique réel K quelconque

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \bigoplus_{\underline{r}\in\mathbb{N}^2} M_{\underline{r}}(\Gamma)$$

n'est pas un anneau de type fini, et ne peut même pas être engendré par les images d'un ensemble fini de formes modulaires, par des opérateurs différentiels.

Suivant Resnikoff, nous étudions le corps différentiel engendré par les dérivées partielles d'une seule forme modulaire de Hilbert. Dans le cas de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, on verra que l'anneau engendré par toutes les dérivées partielles de la forme modulaire φ_2 est contenu dans un anneau de type fini (en analogie avec (2)), que l'on décrira explicitement.

1.2. Prélude : le cas elliptique. — Une forme modulaire *elliptique* est par définition une forme modulaire pour le groupe $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ (*cf.* [**21**] p. 135 ou [**16**]).

Proposition 1.2. — *Soit F une forme modulaire elliptique non constante de poids f. Alors :*

(1) *La fonction $fF(d^2F/dz^2) - (f+1)(dF/dz)^2$ est une forme modulaire de poids $2f+4$.*

(2) *Les fonctions $F, (dF/dz), (d^2F/dz^2), (d^3F/dz^3)$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathbb{C}$.*

(3) *Les fonctions* $F, (dF/dz), (d^2F/dz^2)$ *sont algébriquement indépendantes sur* $\mathbb{Q}(e^{2\pi \mathrm{i} z})$.

Ceci est la proposition 1.1 p. 2 de [**17**] : ce résultat est dû à Mahler, mais s'appuie fortement sur des contributions de Hurwitz et Rankin. L'opérateur

$$F \longmapsto (2\pi\mathrm{i})^{-2}\left(fF\frac{d^2F}{dz^2} - (f+1)\left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right)$$

est une spécialisation des crochets de Rankin-Cohen définis comme suit. Pour deux formes modulaires F, G de poids respectifs f, g, on pose :

$$[F,G]_n := \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^n}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{f+n-1}{n-r}\binom{g+n-1}{r}F^{(r)}G^{(n-r)},$$

où $F^{(r)}$ désigne la dérivée r-ième de F par rapport à la variable complexe z. La forme modulaire $[F,G]_n$ est de poids $f+g+2n$ si elle est non nulle. Par exemple, on a :

$$[F,F]_2 = (f+1)(2\pi\mathrm{i})^{-2}\left(fF\frac{d^2F}{dz^2} - (f+1)\left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right).$$

Les crochets de Rankin-Cohen sont étudiés en détail dans [**16**] et [**23**].

Il existe des relations liant ces crochets, lorsqu'ils sont appliqués à une même forme modulaire. En voici un exemple :

$$[F,[F,F]_2]_2 = \frac{6f(f+1)}{(f+2)(f+3)}F[F,F]_4.$$

D'autres exemples peuvent être construits avec la remarque du paragraphe 6.3 ; on verra que ce type de relation peut être très utile.

Le plus simple des crochets est le crochet de Rankin

$$[F,G]_1 = (2\pi i)^{-1}\Big(fF\frac{dG}{dz} - gG\frac{dF}{dz}\Big).$$

Ce crochet est antisymétrique [(1)], et il peut être utilisé pour déterminer la structure d'anneau gradué de toutes les formes modulaires elliptiques : cet anneau est isomorphe à l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[X_0, X_1]$, en deux indéterminées X_0, X_1.

On commence par une série d'Eisenstein

$$E_4^*(z) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)}\frac{1}{(mz+n)^4},$$

qui est une forme modulaire elliptique non nulle de poids 4. La proposition 1.2(1), (2), et le fait que l'opérateur différentiel $F \mapsto [F,F]_2$ est d'ordre 2, implique que $\Delta^* = [E_4^*, E_4^*]_2$ est une forme modulaire non nulle de poids 12. De plus, E_4^*, Δ^* sont algébriquement indépendantes.

[(1)] Plus généralement, les crochets $[\cdot,\cdot]_{2n+1}$ sont antisymétriques, et les crochets $[\cdot,\cdot]_{2n}$ sont symétriques.