

EMPILEMENTS DE CERCLES ET APPROXIMATIONS CONFORMES

Yves COLIN DE VERDIÈRE *

Frédéric MATHÉUS

Institut Universitaire de France
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
F-38402 Saint Martin d'Hères Cedex (France)

Ecole Normale Supérieure de Lyon
Département de Mathématiques
46, Allée d'Italie
F-69364 Lyon (France)

Abstract. The variational approach previously developed by the first author to build finite circle packing immersions enables us to give a method to approximate conformal immersions of compact regions of the plane, with piecewise affine maps defined thanks to circle packings.

In the case of the complex exponential, there is an exact formula for the radii, and this gives a new interpretation of the famous Doyle spirals.

Résumé. L'approche variationnelle, développée antérieurement par le premier auteur pour construire des empilements de cercles immergés finis, fournit une méthode d'approximation des immersions conformes d'un compact du plan au moyen d'applications affines par morceaux définies à l'aide d'empilements de cercles.

Dans le cas de l'exponentielle complexe, on dispose d'une formule exacte pour les rayons, ce qui donne une nouvelle interprétation des spirales de Doyle.

M.S.C. Subject Classification Index (1991) : 11F72, 11R39, 22E55.

*GADGET

TABLE DES MATIÈRES

I. INTRODUCTION	255
II. ÉNONCÉ DU THÉORÈME D'APPROXIMATION	256
III. UN EXEMPLE : LA FONCTION EXPONENTIELLE	260
IV. SCHÉMA DE LA PREUVE	261
V. DÉFORMATIONS D'EMPILEMENTS DE CERCLES	261
VI. CONVERGENCE DES RAYONS	265
VII. FIN DE LA PREUVE DU THÉORÈME PRINCIPAL	270
BIBLIOGRAPHIE	271

I. INTRODUCTION

Répondant à une question posée par W. Thurston en 1985 (voir [Th]), Burt Rodin et Dennis Sullivan ([R-S]) ont montré comment les empilements de cercles permettaient de construire des approximations quasi-conformes de l'uniformisation de Riemann d'un ouvert simplement connexe borné de $\mathbb{C}$. Leur méthode repose sur un résultat de rigidité, la rigidité de l'empilement hexagonal standard (voir [R-S]).

Kenneth Stephenson a considérablement généralisé le résultat de Rodin et Sullivan : la combinatoire des empilements utilisés ainsi que les rayons des cercles sont variables (voir [St] et [H-R]). Il obtient également une approximation du module de la dérivée de l'application uniformisante. Il utilise des méthodes probabilistes qui mettent en jeu des marches aléatoires. Il prouve en particulier une version discrète de l'inégalité de Harnack grâce au théorème de récurrence de Polya.

Dans [CV], le premier auteur propose une construction d'empilements de cercles reposant sur la résolution d'un problème de Dirichlet discret. Ce point de vue fournit une méthode d'approximation des fonctions holomorphes dont la dérivée ne s'annule pas (voir II). La convergence repose sur l'approche variationnelle développée dans [CV] où les empilements de cercles sont réalisés comme points critiques d'une certaine fonctionnelle (voir VI). Les calculs sont notablement allégés par l'existence d'un exemple, la fonction exponentielle, pour lequel les rayons des cercles des empilements associés sont explicitement connus (voir III). Cet exemple a été découvert "expérimentalement" à la suite de calculs sur ordinateur réalisés par le premier auteur et Laurent Guillopé. Il avait été observé, il y a quelques années, par P. Doyle (voir [C-R]).

II. ÉNONCÉ DU THÉORÈME D'APPROXIMATION

Rappelons la définition d'un empilement de cercles. Soit $\mathcal{T}$ une triangulation (finie ou infinie) d'un disque topologique et S l'ensemble des sommets de $\mathcal{T}$. Soit $r = (r_s)_{s \in S} \in (\mathbb{R}_+^*)^S$. On munit chaque triangle de $\mathcal{T}$ de la métrique euclidienne qui au côté ss' affecte la longueur $r_s + r_{s'}$. On obtient ainsi une variété riemannienne plate à singularités coniques, notée $\mathcal{T}_r$ (voir [Tr]). Soit s un sommet d'un triangle T de $\mathcal{T}$. Si $\alpha(s, T)$ désigne l'angle en s dans le triangle T et si s est un sommet intérieur, alors la courbure en s est

$$K_s(r) = 2\pi - \sum_{s \in T} \alpha(s, T) .$$

La famille de cercles $\mathcal{C} = \{C_s, s \in S\}$, où C_s est le cercle de $\mathcal{T}_r$ de centre s , de rayon r_s , possède la propriété suivante : les cercles C_s et $C_{s'}$ sont tangents si et seulement si l'arête ss' appartient au 1-squelette $\mathcal{T}^1$ de la triangulation $\mathcal{T}$.

Si pour tout sommet intérieur s , on a $K_s(r) = 0$, alors la variété $\mathcal{T}_r$ est immergée isométriquement dans $\mathbb{R}^2$ (mais non plongée a priori). On dit alors que $\mathcal{C}$ est un empilement de cercles de combinatoire $\mathcal{T}^1$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant l'hexagone unité $\mathcal{H}$ et soit f une fonction définie sur U , holomorphe, dont la dérivée ne s'annule pas. On note $\mathcal{T}_N$ (pour un entier $N \geq 1$) la triangulation de $\mathcal{H}$ par des triangles équilatéraux de côté $\frac{1}{N}$, S_N l'ensemble des sommets de $\mathcal{T}_N$ et H_N l'empilement constitué de cercles de rayon $\frac{1}{2N}$ et dont les centres sont les sommets de $\mathcal{T}_N$. La figure page 223 représente $\mathcal{H}$, $\mathcal{T}_N$ et H_N pour $N = 3$. On observe que la combinatoire de H_N n'est autre que $\mathcal{T}_N^1$.

On construit un nouvel empilement, noté $\tilde{H}_N$ de la façon suivante. Il doit vérifier les deux conditions *i)* et *ii)* ci-dessous :

i) la combinatoire de $\tilde{H}_N$ est $\mathcal{T}_N^1$;

ii) les rayons des cercles du bord de $\tilde{H}_N$ sont donnés par : $\frac{1}{2N}|f'(z_1)|, \dots, \frac{1}{2N}|f'(z_{6N})|$, où $z_1, \dots, z_{6N}$ désignent les centres des cercles de H_N situés sur $\partial\mathcal{H}$.

D'après le premier théorème du §4 de [CV], il existe un empilement de cercles vérifiant les conditions i) et ii) ci-dessus, et cet empilement est unique à isométrie près.

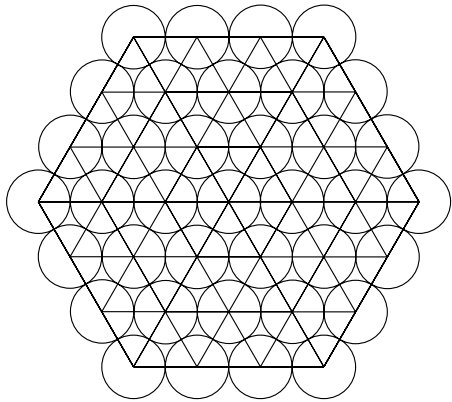


Fig. 1 : $\mathcal{H}$, $\mathcal{T}_3$ et H_3

Dans toute la suite, $\tilde{H}_N$ désignera l'unique empilement de cercles du plan satisfaisant aux conditions i), ii) et iii) ci-dessus.

On construit maintenant une application f_N définie sur $\mathcal{H}$ de la façon suivante :

- l'image par f_N du centre de tout cercle C de H_N est le centre du cercle correspondant $\tilde{C}$ de $\tilde{H}_N$;
- on prolonge f_N à chaque triangle de $\mathcal{T}_N$ en une application affine.

On notera que l'empilement $\tilde{H}_N$ est immergé mais non nécessairement plongé, de sorte que l'application f_N n'est pas a priori injective.

Enfin, si $z \in \mathcal{H}$, on note $s_N(z)$ un sommet d'un triangle de $\mathcal{T}_N$ contenant z , et $r_N(z)$ le rayon du cercle de $\tilde{H}_N$ correspondant au cercle de H_N de centre $s_N(z)$. Les fonctions f_N étant affines par morceaux, elles ne sont pas à proprement parler différentiables ; elles ont cependant des dérivées directionnelles, ce qui permet de leur attribuer une différentielle $f'_N(z)$ qui est une application linéaire par morceaux de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, homogène de degré 1. Sa norme ponctuelle est la borne supérieure des normes des vecteurs tangents unitaires en z . On peut aussi parler de la convergence

Notons C_N^s le cercle de H_N centré en $s \in S_N$ et $\tilde{C}_N^s$ le cercle de $\tilde{H}_N$ correspondant à C_N^s . L'empilement $\tilde{H}_N$ sera parfaitement déterminé si l'on exige qu'il satisfasse la condition suivante, dite de normalisation :

- iii) le cercle $\tilde{C}_N^0$ est centré en $f(0)$, et le cercle $\tilde{C}_N^{1/N}$ est centré sur la demi-droite $f(0) + \mathbb{R}_+ \overrightarrow{f'(0)}$.