Séminaires & Congrès
5, 2001, p. 101–117

CORPS DES MODULES ET BONNES PLACES

par

Stéphane Flon

Résumé. — La considération des espaces des modules (espace de Hurwitz des modules grossier, gerbe et variété des modèles) permet ici de prouver un certain nombre de résultats connus : le théorème de Beckmann sur les premiers ramifiés dans le corps des modules, l'existence et l'unicité d'un bon modèle sur l'extension non ramifiée maximale du corps de rationalité du lieu de branchement en une bonne place, la stabilité d'un tel modèle. On exhibe enfin un exemple de descente donnant un *bon* modèle sur le complété du corps des modules en une bonne place.

***Abstract* (Moduli field and good places).** — A close look to moduli spaces (Hurwitz' coarse moduli space, gerbe and variety of models) allows us to prove several known results: Beckmann's theorem on ramified primes in the moduli field, existence and unicity of a good model on the maximal unramified extension at a good place of the rationality field of the branch locus, and stability of such a model. Lastly, one exhibits an example of descent to the completion of the field of moduli at a good place. One also shows the existence of a *good* model on this latter field.

1. Notions préliminaires sur les revêtements algébriques

1.1. Revêtements et G-revêtements. — Dans la suite, K est un corps et K^s désigne une clôture séparable fixée.

Définition 1.1. — Un *revêtement de la droite projective sur* K est un morphisme fini, plat, et génériquement étale $f : X \to \mathbb{P}^1_K$ sur K, X étant une courbe projective lisse et géométriquement irréductible sur K.

Un *morphisme entre deux revêtements* $f_1 : X \to \mathbb{P}^1_K$ et $f_2 : X' \to \mathbb{P}^1_K$ est un morphisme $\phi : X \to X'$ tel que $f_2 \circ \phi = f_1$ (autrement dit, c'est un $\mathbb{P}^1_K$-morphisme de X vers X').

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14D22, 14E22, 14H30.
Mots clefs. — Corps des modules, espace de Hurwitz des modules grossier, (G-)revêtements, gerbe des modèles.

On sait qu'à un revêtement $f : X \to \mathbb{P}^1_K$ est associée une extension finie régulière $K(X)/K(t)$ (où $K(t)$ est le corps des fractions rationnelles sur K). Cette correspondance fournit en fait une équivalence (contravariante) de catégories entre la catégorie des revêtements de $\mathbb{P}^1_K$ et celle des extensions finies régulières séparables de $K(t)$.

Si L est un corps contenant K, et $f : X \to \mathbb{P}^1_K$ un revêtement sur K, on obtient un revêtement $f \times_K L$ sur L par extension des scalaires (de K à L).

Définition 1.2. — Soit $t_0 \in \mathbb{P}^1_K$; par *fibre géométrique du revêtement* f on entend l'ensemble $(f \times_K K^s)^{-1}(t_0)$, et on le note $f^{-1}(t_0)$.

Tout automorphisme de f agit sur une telle fibre.

Définition 1.3. — Un revêtement $f : X \to \mathbb{P}^1_K$, est dit *galoisien* si le groupe $\mathrm{Aut}(X/\mathbb{P}^1_K)$ des automorphismes de f agit simplement transitivement sur toute fibre géométrique du revêtement. De façon équivalente, f est galoisien si et seulement si l'extension séparable $K(X)/K(t)$ est galoisienne.

Définition 1.4. — Un *G-revêtement de groupe G sur K* est la donnée conjointe d'un revêtement galoisien $f : X \to \mathbb{P}^1_K$ sur K, et d'un isomorphisme $h : G \to \mathrm{Aut}(X/\mathbb{P}^1_K)$ de G sur le groupe des automorphismes du revêtement.

Un *morphisme entre deux G-revêtements de groupe G*

$$(f_1 : X \to \mathbb{P}^1, h_1 : G \to \mathrm{Aut}(X/\mathbb{P}^1))$$
$$(f_2 : X' \to \mathbb{P}^1, h_2 : G \to \mathrm{Aut}(X'/\mathbb{P}^1))$$

est un isomorphisme $\phi : X \to X'$ de revêtements induisant un isomorphisme

$$\widetilde{\phi} : \mathrm{Aut}(X/\mathbb{P}^1) \to \mathrm{Aut}(X'/\mathbb{P}^1)$$

tel que $\widetilde{\phi} \circ h_1 = h_2$.

Définition 1.5. — On se donne un revêtement connexe $f : X \to \mathbb{P}^1_K$. On définit la *clôture galoisienne* $\widehat{f} : \widehat{X} \to \mathbb{P}^1_K$ de f comme le revêtement correspondant à la clôture galoisienne de $K(X)/K(t)$ par l'équivalence précédemment citée.

Notation. — On écrit (G-)revêtement pour désigner indifféremment un revêtement ou un G-revêtement.

1.2. Invariants élémentaires d'un (G-)revêtement. — À un (G-)revêtement de $\mathbb{P}^1_K$ sont associés quatre invariants élémentaires (qui ne dépendent donc que de la classe d'isomorphisme du revêtement) :

– *Le degré du (G-)revêtement*, qui est le degré de l'extension $K(X)/K(t)$.

– *Le groupe de monodromie géométrique du (G-)revêtement*, qui est le groupe des automorphismes de la clôture galoisienne $\widehat{f} : \widehat{X} \to \mathbb{P}^1_{K^s}$ de f_{K_s}, groupe opposé au groupe de Galois de l'extension $K^s(\widehat{X}_{K^s})/K^s(t)$.

– *L'ensemble des points de branchement du (G-)revêtement*, $t_1, \dots, t_r$, qui sont les points de la droite projective où la fibre géométrique possède moins de points que le degré du revêtement. On appelle le diviseur $(t_1)+\cdots+(t_r)$ le *diviseur de branchement du (G-)revêtement.*

Si x est un point de la fibre au-dessus d'un point de branchement t, les complétés des anneaux locaux de X en x et de $\mathbb{P}^1$ en t donnent une extension d'anneaux de valuation discrète. L'*indice de ramification* e_x de x est l'indice de ramification de cette extension. Le point x est appelé un *point de ramification* si $e_x > 1$ (bien sûr, il existe toujours au moins un point de ramification au-dessus d'un point de branchement). Si cette extension est séparable et que la caractéristique du corps résiduel ne divise pas l'ordre du groupe de monodromie, on dit que la ramification est *modérée* en x. Sinon, on dit que la ramification est *sauvage*. Si le revêtement f n'a pas de point de ramification, on dit qu'il est *non ramifié*. Un revêtement non ramifié est étale (un revêtement est plat par définition).

– *L'invariant canonique d'inertie du revêtement* : on fixe une clôture séparable K^s de K, et un système cohérent de racines de l'unité dans K^s, $(S_e)_{(e,p)=1}$, où S_e est une racine primitive e-ème de l'unité (p étant la caractéristique de K). Pour tout e premier à p, l'ensemble des racines e-èmes de l'unité (dans K^s) sera noté Ω_e.

Notons par $\{t_1, \dots, t_r\}$ l'ensemble des points de ramification de f. On suppose que f est modérément ramifié en un certain point x_i au-dessus de t_i, l'indice de ramification étant noté e_{x_i}.

Le groupe d'inertie G_0 de l'extension correspondante est un groupe cyclique d'ordre e_{x_i}, car la ramification est modérée (*cf.* [**29**]). On note π une uniformisante locale de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i}$. L'application $G_0 \to \Omega_{e_{x_i}}$, qui à un élément s de G_0 associe l'élément $s(\pi)/\pi$ mod π est en fait un isomorphisme de groupes, indépendant du choix de π (*loc. cit.*). L'antécédent de $S_{e_{x_i}}$ par cet isomorphisme est le *générateur distingué de l'inertie en* t_i (qui dépend du système cohérent $(S_e)_{(e,p)=1}$ choisi).

On définit alors C_i comme la classe de conjugaison des générateurs d'inertie distingués au-dessus de t_i.

L'invariant canonique d'inertie du revêtement est le r-uplet (ordonné ou non selon que les points de ramification le sont ou pas) $\boldsymbol{C} = (C_1, \dots, C_r)$.

1.3. L'action de Galois sur les (G-)revêtements. — On considère une extension galoisienne L/K. Le groupe $\mathrm{Gal}(L/K)$ agit de façon naturelle sur les (G-)revêtements sur L. En effet, donnons-nous un (G-)revêtement $f : X \to \mathbb{P}^1_L$, et σ un élément du groupe de Galois de L sur K. Le *revêtement* f^σ résultant de l'action de σ sur f est défini par le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} X^\sigma \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f^\sigma"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, dashed, "f"] \\ \mathbb{P}^1_K \times_K L \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbb{P}^1_K} \times \sigma"'] & \mathbb{P}^1_K \times_K L \end{tikzcd}$$

On note G_K le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(K^s/K)$. Un élément σ de G_K agit sur tout (G-)revêtement f défini sur K^s. Les invariants de f^σ se déduisent de ceux de f : le groupe de monodromie de f^σ est le même que celui de f ; le diviseur de branchement de f est inchangé par l'action de σ dans le cas où il est défini sur K. Dans ce dernier cas, l'invariant canonique de l'inertie de f^σ se déduit de celui de f par action du caractère cyclotomique.

2. Corps des modules, corps de définition

Dans cette section, on introduit les notions de corps de définition et de corps des modules. On décrit sommairement l'obstruction à ce que le corps des modules soit un corps de définition.

Donnons-nous un (G-)revêtement $f : X \to \mathbb{P}^1_{K^s}$ défini sur K^s, de groupe de monodromie G, et de diviseur de branchement défini sur K.

Définition 2.1. — Un sous-corps k de K^s est un *corps de définition* du revêtement (resp. du G-revêtement) f s'il existe un revêtement (resp. un G-revêtement) $f' : X' \to \mathbb{P}^1_k$ tel que f et $f' \times_k K^s$ soient deux revêtements (resp. G-revêtements) isomorphes ; un tel (G-)revêtement sera appelé un *modèle de f sur k*.

On considère une extension galoisienne L/K, ainsi qu'un (G-)revêtement $f : X \to \mathbb{P}^1_L$, de lieu de branchement défini sur K. On a vu qu'un élément σ de $\mathrm{Gal}(L/K)$ induit un (G-)revêtement $f^\sigma : X^\sigma \to \mathbb{P}^1_L$.

Soit $G(f) := \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K) \mid f^\sigma \simeq f\}$ où $f^\sigma \simeq f$ signifie que f^σ et f sont isomorphes *sur* L en tant que revêtements (resp. G-revêtements).

Définition 2.2. — Le *corps des modules du revêtement (resp. du G-revêtement) f relativement à l'extension* L/K est le corps $L^{G(f)}$; on le notera M (resp. M_G). On appellera *corps des modules d'un (G-)revêtement f relativement à* K le corps des modules relativement à K^s/K.

Le corps des modules de f relativement à K est une extension finie de K contenue dans chaque corps de définition de f contenant K. Le corps des modules d'un revêtement est donc d'une certaine façon le plus petit corps de définition possible pour le revêtement considéré. Ce n'est cependant pas toujours un corps de définition. On peut se référer à ce sujet aux articles [**4**], [**5**], [**6**], qui présentent des exemples de (G-)revêtements de corps des modules $\mathbb{Q}$, ne pouvant se définir sur $\mathbb{R}$, car ne possédant pas de données de descente de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$.

L'obstruction à ce que le corps des modules soit un corps de définition est assez bien connue ; dans le cas des G-revêtements, elle peut s'exprimer en termes de cohomologie abélienne (dans un H^2). On pourra consulter les articles [**7**] et [**8**] de P. Dèbes sur le sujet. P. Dèbes et J-C. Douai ont décrit dans [**9**] l'obstruction dans le cas des revêtements, qui se traduit cette fois en termes de cohomologie non abélienne, et fait intervenir toute une famille d'éléments d'un H^2 non abélien.

Ces résultats prouvent entre autres que l'obstruction est levée (*i.e.* le (G-)revêtement admet un modèle sur son corps des modules) dans le cas où G_K est un groupe projectif profini. Il en sera en particulier ainsi si K est de dimension cohomologique $\leqslant 1$ (par exemple lorsque K est fini).

3. Espace de Hurwitz sur un anneau, lien avec le corps des modules

3.1. Espaces des modules fins, espaces des modules grossiers. — On note $\mathcal{E}ns$ la catégorie des ensembles.

Définition 3.1. — Pour tout objet X d'une catégorie $\mathcal{C}$, on note $\widehat{X} : \mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$ le foncteur contravariant qui à un objet Y de $\mathcal{C}$ associe l'ensemble $\mathrm{Hom}\,(Y, X)$.

Définition 3.2. — Soit F un foncteur $\mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$. On dit que F est *représentable* s'il existe un objet X de $\mathcal{C}$ tel que F et $\widehat{X}$ soient isomorphes. On dit alors que F est *représenté* par X.

Tout morphisme $\beta : X \to X'$ induit un morphisme $\widehat{X} \to \widehat{X'}$, que l'on note β_*.

Le foncteur $\mathcal{C} \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{E}ns)$, qui à un objet X de $\mathcal{C}$ associe $\widehat{X}$ est pleinement fidèle, et par conséquent, si $\omega : \widehat{X} \to \widehat{X'}$ est un isomorphisme, il existe un unique isomorphisme $\beta : X \to X'$ tel que $\beta_* = \omega$. De plus, ce foncteur fournit une équivalence de catégories entre $\mathcal{C}$ et la sous-catégorie de $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{E}ns)$ constituée des foncteurs représentables.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie *fibrée* au-dessus de la catégorie $\mathcal{S}ch$ des schémas, on obtient un foncteur $\phi_{\mathcal{C}} : \mathcal{S}ch \to \mathcal{E}ns$ en associant à un objet S de $\mathcal{S}ch$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{C}$ au-dessus de S. Pour une définition précise d'une catégorie fibrée, voir les articles [**14**] et [**18**] dans le présent volume, ou [**26**].

Définition 3.3. — Tout schéma représentant le foncteur $\phi_{\mathcal{C}}$ est appelé un *espace des modules fin pour la catégorie* $\mathcal{C}$.

Remarque 3.4. — Un tel schéma est unique, à isomorphisme unique près.

Définition 3.5. — $\phi_{\mathcal{C}}$ est dit *faiblement représentable* s'il existe un schéma H et un morphisme de foncteurs $\alpha : \phi_{\mathcal{C}} \to \widehat{H}$ tels que :

– Pour tout objet H' de $\mathcal{C}$ muni d'un morphisme $\alpha' : \phi_{\mathcal{C}} \to \widehat{H'}$, il existe un unique morphisme $\theta : H \to H'$ tel que $\alpha' = \theta_* \circ \alpha$,

– Si k est algébriquement clos, $S = \mathrm{Spec}\,(k)$, alors α_S est une bijection (entre $\phi_{\mathcal{C}}\,(S)$ et $\mathrm{Hom}\,(S, H)$)