

# *Astérisque*

DENIS-CHARLES CISINSKI

**Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie**

*Astérisque*, tome 308 (2006)

[<http://www.numdam.org/item?id=AST\\_2006\\_\\_308\\_\\_R1\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_2006__308__R1_0)

© Société mathématique de France, 2006, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ASTÉRISQUE 308

**LES PRÉFAISCEAUX COMME  
MODÈLES DES TYPES D'HOMOTOPIE**

**Denis-Charles Cisinski**

**Société Mathématique de France 2006**

**Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique**

*Denis-Charles Cisinski*

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, CNRS (UMR 7539),  
Institut Galilée, Université Paris 13, Avenue Jean-Baptiste Clément,  
93430 Villetaneuse, France.

*E-mail* : `cisinski@math.univ-paris13.fr`

*Url* : `http://www.math.univ-paris13.fr/~cisinski/`

---

***Classification mathématique par sujets (2000).*** — 55-02, 18F20, 18G50, 18G55, 18G30, 54B30, 54B40, 55P57, 55P60, 55P92, 55U35, 55U40.

***Mots clefs.*** — homotopie, catégorie de modèles, préfaisceau, catégorie test locale, extension de Kan homotopique, théorie de l'homotopie équivariante.

---





# LES PRÉFAISCEAUX COMME MODÈLES DES TYPES D'HOMOTOPIE

Denis-Charles Cisinski

**Résumé.** — Grothendieck a introduit dans *À la poursuite des champs* la notion de *catégorie test*, petite catégorie ayant par définition la propriété que les préfaisceaux sur celle-ci sont naturellement des modèles pour les types d'homotopie des CW-complexes. Un exemple bien connu est celui de la catégorie des simplexes (les préfaisceaux correspondant étant alors les ensembles simpliciaux). Grothendieck a de plus dégagé la notion de *localisateur fondamental*, ce qui donne une description axiomatique de la théorie de l'homotopie des petites catégories, et permet d'étendre la notion de catégorie test relativement à des localisations de la catégorie homotopique des CW-complexes. Ce texte peut être vu comme une prolongation de la théorie de l'homotopie de Grothendieck. On démontre en particulier deux conjectures de Grothendieck : toute catégorie de préfaisceaux sur une catégorie test admet canoniquement une structure de catégorie de modèles fermée au sens de Quillen, et le localisateur fondamental minimal définit la théorie de l'homotopie des CW-complexes. On montre par ailleurs comment une version locale de la théorie permet d'englober dans un même schéma la théorie de l'homotopie équivariante. La mise en œuvre de ce programme passe par la construction et l'étude systématiques de structures de catégorie de modèles sur des catégories de préfaisceaux quelconques, ainsi que par l'étude de la théorie de l'homotopie des petites catégories en suivant et en complétant les différentes contributions de Quillen, Thomason et Grothendieck.

**Abstract (Presheaves as models for homotopy types).** — Grothendieck introduced in *Pursuing Stacks* the notion of *test category*. These are by definition small categories on which presheaves of sets are models for homotopy types of CW-complexes. A well known example is the category of simplices (the corresponding presheaves are then simplicial sets). Moreover, Grothendieck defined the notion of *basic localizer* which gives an axiomatic approach to the homotopy theory of small categories, and gives a natural setting to extend the notion of test category with respect some localizations of the homotopy category of CW-complexes. This text can be seen as a sequel of Grothendieck's homotopy theory. We prove in particular two conjectures made by Grothendieck: any category of presheaves on a test category is canonically endowed with a Quillen closed model category structure, and the smallest basic localizer defines the homotopy theory of CW-complexes. Moreover, we show how a local version of the theory allows to consider in a unified setting the equivariant homotopy theory as well. The realization of this program goes through the construction and the study of model category structures on any category of presheaves on an abstract small category, as well as the study of the homotopy theory of small categories following and completing the contributions of Quillen, Thomason and Grothendieck.

# TABLE DES MATIÈRES

|                                                                           |         |
|---------------------------------------------------------------------------|---------|
| Préambule .....                                                           | ix      |
| <b>Introduction</b> .....                                                 | xi      |
| Le principe de contractibilité locale .....                               | xi      |
| Vers les catégories test .....                                            | xiii    |
| Fil d'Ariane .....                                                        | xvii    |
| Notations génériques .....                                                | xxiv    |
| <br><b>Partie I. Algèbre homotopique des préfaisceaux</b> .....           | <br>1   |
| <b>1. Constructions de catégories de modèles</b> .....                    | 3       |
| 1.1. Propriétés de stabilité de classes de flèches ou d'objets .....      | 3       |
| 1.2. Accessibilité .....                                                  | 11      |
| 1.3. Extensions anodines .....                                            | 23      |
| 1.4. $A$ -localisateurs .....                                             | 52      |
| 1.5. Propreté .....                                                       | 65      |
| 1.6. Cofibrations exotiques .....                                         | 74      |
| <br><b>2. Yoga simplicial</b> .....                                       | <br>83  |
| 2.1. Ensembles simpliciaux .....                                          | 83      |
| 2.2. Caractérisation locale de la classe des $\infty$ -équivalences ..... | 100     |
| 2.3. Réalisations simpliciales .....                                      | 107     |
| <br><b>3. Densité homotopique</b> .....                                   | <br>123 |
| 3.1. Propriétés locales des extensions de Kan homotopiques .....          | 123     |
| 3.2. Préfaisceaux réalisés en catégories .....                            | 137     |
| 3.3. Localisateurs fondamentaux et fibrations de Grothendieck .....       | 143     |
| 3.4. Régularité .....                                                     | 151     |

|                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Partie II. À la poursuite des modèles</b>                    | 173 |
| <b>4. Correspondances fondamentales</b>                         | 175 |
| 4.1. Catégories test locales                                    | 175 |
| 4.2. Modélisateurs élémentaires                                 | 183 |
| 4.3. Ubiquité de la propreté                                    | 190 |
| 4.4. Types d'homotopie localement constants                     | 199 |
| <b>5. Factorisations de foncteurs</b>                           | 213 |
| 5.1. Cofibrations formelles                                     | 213 |
| 5.2. Structures de catégorie de modèles de Thomason             | 221 |
| 5.3. Approximations propres et lisses                           | 227 |
| <b>6. Changements de base homotopiques</b>                      | 233 |
| 6.1. Propreté et asphéricité                                    | 233 |
| 6.2. Critères locaux pour les carrés homotopiquement cartésiens | 243 |
| 6.3. Transversalité homotopique                                 | 249 |
| 6.4. Foncteurs localement constants                             | 267 |
| 6.5. Systèmes locaux                                            | 275 |
| <b>7. Représentations et structures fibrées</b>                 | 283 |
| 7.1. Représentations d'un préfaisceau de groupes                | 283 |
| 7.2. Descente et monodromie                                     | 289 |
| 7.3. Torseurs et fibrations faibles                             | 295 |
| 7.4. Classification des toreseurs                               | 300 |
| 7.5. Fibrés et fibrations                                       | 305 |
| <b>Partie III. Zoologies</b>                                    | 309 |
| <b>8. Exemples de catégories test locales</b>                   | 311 |
| 8.1. Catégories squelettiques                                   | 311 |
| 8.2. Catégories squelettiques régulières                        | 324 |
| 8.3. Ensembles simpliciaux symétriques                          | 332 |
| 8.4. Ensembles cubiques                                         | 335 |
| 8.5. Ensembles cycliques                                        | 351 |
| <b>9. Exemples de localisateurs fondamentaux</b>                | 363 |
| 9.1. Troncations de Postnikov et cosquelettes                   | 363 |
| 9.2. Types d'homotopie tronqués                                 | 364 |
| 9.3. Localisateurs fondamentaux triviaux                        | 371 |
| 9.4. Homologies, torsions et impropres                          | 373 |
| <b>Bibliographie</b>                                            | 377 |
| <b>Index</b>                                                    | 387 |
| <b>Index des notations</b>                                      | 391 |

## Préambule

Le point de départ de ce travail est *À la Poursuite des Champs* [67], manuscrit non publié d'Alexandre Grothendieck dans lequel il déploie sa vision de la théorie de l'homotopie. C'est suite au profond effort de mise en forme de la théorie d'Alexandre Grothendieck fait par Georges Maltsiniotis [96] que ce livre prend sa place.

Ce texte est issu de ma thèse de doctorat, effectuée sous la direction de Georges Maltsiniotis. Il correspond cependant à une version largement réécrite, complétée et approfondie du texte original. Georges Maltsiniotis m'a aidé et soutenu à bien des égards lors de la préparation de ma thèse, ainsi que durant la rédaction de ce livre. De plus, il a bien voulu me laisser inclure dans le premier chapitre ses notes sur les « Propriétés de stabilité de classes de flèches ou d'objets », et ses nombreuses propositions de rédaction ont contribué sensiblement à la clarté d'un certain nombre de passages. En particulier, il a amélioré la définition d'extension anodine en dégageant une axiomatique simple, et sa notion d'équivalence faible absolue a permis une approche conceptuelle de points *a priori* délicats. Pour tout le temps qu'il a consacré à suivre ce travail, et pour m'avoir initié à la théorie de l'homotopie, je tiens à lui exprimer toute ma gratitude.

Je veux par ailleurs remercier le comité de rédaction d'Astérisque pour sa patience et sa confiance, et en particulier, Pierre Colmez, Yves André et Raphaël Rouquier pour leur soutien et leur attention.

Denis-Charles Cisinski

Paris, le 10 août 2006