

ASTÉRISQUE 296

ANALYSE COMPLEXE,
SYSTÈMES DYNAMIQUES,
SOMMABILITÉ
DES SÉRIES DIVERGENTES
ET THÉORIES GALOISIENNES (I)

VOLUME EN L'HONNEUR DE JEAN-PIERRE RAMIS

édité par

Michèle Loday-Richaud

Société Mathématique de France 2004

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

M. Loday-Richaud

Université d'Angers – UFR Sciences, LAREMA, UMR 6093, 2 boulevard Lavoisier,
49 045 Angers Cedex 01 (France).

E-mail : `michele.loday@univ-angers.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 01A70, 11R32, 11R39, 11S80, 12Hxx, 13Nxx, 17B15, 32G34, 32S65, 33E17, 34A30, 34A34, 34Mxx, 35A27, 35D10, 37F75, 39A13, 58B34, 81T15.

Mots clefs. — Algèbre différentielle ; monodromie p -adique ; équations différentielles, équations aux différences, équations aux q -différences dans le champ complexe ; modules de Krichever ; descente ; pinceaux de feuilletages ; courbure ; D -modules holonomes ; b -fonctions ; intégrabilité ; géométrie non commutative (à la Connes) ; renormalisation ; algèbres de Hopf ; théories de Galois ; correspondance de Riemann-Hilbert ; déformations isomonodromiques.

ANALYSE COMPLEXE, SYSTÈMES DYNAMIQUES,
SOMMABILITÉ DES SÉRIES DIVERGENTES
ET THÉORIES GALOISIENNES (I)

VOLUME EN L'HONNEUR DE JEAN-PIERRE RAMIS

édité par Michèle Loday-Richaud

Résumé. — Cet ouvrage en deux volumes rassemble les actes du colloque *Analyse complexe, systèmes dynamiques, sommabilité des séries divergentes et théories galoisiennes* organisé à Toulouse du 22 au 26 septembre 2003 à l'occasion du soixantième anniversaire de Jean-Pierre Ramis.

En introduction, le premier volume propose deux textes de souvenirs et trois textes de synthèse des travaux de J.-P. Ramis en analyse complexe, en théorie des équations différentielles linéaires et en théorie des équations différentielles non-linéaires. Suivent des textes essentiellement consacrés aux théories galoisiennes, à l'arithmétique et à l'intégrabilité : analogies entre théories différentielles et théories arithmétiques, équations aux q -différences classiques ou p -adiques, problème de Riemann-Hilbert et renormalisation, b -fonctions, problèmes de descente, modules de Krichever, lieu d'intégrabilité, théorie de Drach et équation de Painlevé VI.

Le deuxième volume rassemble des textes plutôt liés à des questions d'analyse et de géométrie : stabilité de Lyapounov, analyse asymptotique et dynamique pour des pinceaux de trajectoires, analyse WKB et géométrie de Stokes, équations de Painlevé I et II, formes normales des singularités de type nœud-col, tores invariants d'équations aux dérivées partielles.

Abstract (Complex analysis, dynamical systems, summability of divergent series and Galois theories (I), Volume in honor of Jean-Pierre Ramis)

These two bound volumes present the proceedings of the conference *Complex Analysis, Dynamical Systems, Summability of Divergent Series and Galois Theories* held in Toulouse from September 22nd to September 26th 2003, on the occasion of J.-P. Ramis' 60th birthday.

The first volume opens with two texts composed of recollections and three texts on J.-P. Ramis' works on Complex Analysis and Ordinary Differential Equations Theory, both linear and non-linear. This introduction is followed by papers concerned with Galois Theories, Arithmetic or Integrability: analogies between differential and arithmetical theories, q -difference equations, classical or p -adic, the Riemann-Hilbert problem and renormalisation, b -functions, descent problems, Krichever modules, the set of integrability, Drach theory and the VIth Painlevé equation.

The second volume contains papers dealing with analytical or geometrical aspects: Lyapunov stability, asymptotic and dynamical analysis for pencils of trajectories, monodromy in moduli spaces, WKB analysis and Stokes geometry, first and second Painlevé equations, normal forms for saddle-node type singularities, invariant tori for PDEs.

TABLE DES MATIÈRES

Résumés des articles	xiii
Abstracts	xvii
Avant-Propos	xxi
 B. MALGRANGE — <i>Les premiers travaux de Jean-Pierre Ramis</i>	 1
G. RUGET — <i>Témoignage</i>	7
 D. BERTRAND — <i>Travaux de J.-P. Ramis sur les équations différentielles linéaires</i>	 11
Acte I. Filtrations Gevrey <i>Dijon, 1976</i> ([R1])	11
Acte II. (Re)sommation et groupes de Galois différentiels <i>Les Houches (1979)</i> ([R2]), <i>Rio (1985)</i> ([R4]), <i>Strasbourg (1991)</i> ([Mr-R6])	13
Acte III. La conjecture d'Abhyankar différentielle <i>Toulouse (Nuit de la musique, 1993)</i> ([R10])	16
Références	19
 D. CERVEAU — <i>Travaux de J.-P. Ramis sur les équations différentielles non linéaires</i>	 21
1. Systèmes hamiltoniens (Morales-Ramis)	21
2. Perturbations singulières	24
3. Feuilletages holomorphes	26
Références	31
 M. LODAY-RICHAUD — <i>Souvenirs strasbourgeois</i>	 33
 Y. ANDRÉ — <i>Galois representations, differential equations, and q-difference equations : sketch of a p-adic unification</i>	 43
Introduction	43
1. A mysterious analogy : linear complex differential equations and coverings in characteristic p , tame and wild	44

2. The p -adic analog of this analogy. An equivalence of categories.	46
3. Another analogy : linear differential equations and q -difference equations; confluence	50
4. The p -adic analog of this analogy. Another equivalence of categories [AdV] ..	51
References	53
 Y. ANDRÉ & L. DI VIZIO — <i>q-difference equations and p-adic local monodromy</i> ..	55
Introduction	55
Part I. Rank 1	57
1. Generalities on p -adic q -difference equations of rank 1	57
2. An example : the q -exponential function	61
3. Solvability (at the boundary)	65
4. A characterization of solvability	67
5. Reduction to the case of q -difference equations with polynomial coefficient ..	70
6. Frobenius structure in rank 1 : existence criterion	73
7. q -deformation of differential equations with strong Frobenius structure ...	78
8. The group of isomorphism classes of q -difference equations of rank 1 admitting a Frobenius structure	80
Appendices to part I	82
9. Frobenius structure of $d_q y(x) = \pi_q y(x)$	82
10. p -adic q -exponential and Koblitz' Gamma function	84
Part II. Higher rank	87
11. Preliminaries : unramified extensions of $\mathcal{E}^\dagger$	87
12. q -difference modules and Frobenius structures	89
13. "Unit-root" q -difference modules	98
14. Quasi-unipotence	104
15. Applications	108
References	110
 A. CONNES — <i>Renormalisation et ambiguïté galoisienne</i>	113
1. Introduction	114
2. Renormalisation, position du problème	116
3. Structure algébrique des graphes de Feynman	122
4. Renormalisation et problème de Riemann-Hilbert	127
5. Le groupe de renormalisation	132
6. Le groupe G et les difféomorphismes formels	134
7. Le groupe de renormalisation et la théorie de Galois	136
Références	141
 Y. LAURENT — <i>b-functions and integrable solutions of holonomic $\mathcal{D}$-module</i> ..	145
Introduction	145
1. V -filtration and b -functions	146
2. Reductive Lie algebras	153
References	164

A. LINS NETO — <i>Curvature of pencils of foliations</i>	167
1. Introduction	167
2. Proofs	172
References	189
M. VAN DER PUT — <i>Skew differential fields, differential and difference equations</i>	191
Introduction	191
1. The construction of skew differential fields	192
2. Skew differential fields over $\mathbf{R}(\{x\})$	192
3. Descent for q -difference equations	200
4. Descent for ordinary difference equations	202
References	205
M. VAN DER PUT & M. REVERSAT — <i>Krichever modules for difference and differential equations</i>	207
Introduction	207
1. Abelian differential equations	208
2. Abelian difference equations	217
References	225
J. SAULOY — <i>Algebraic construction of the Stokes sheaf for irregular linear q-difference equations</i>	227
1. Introduction and general conventions	227
2. Local analytic classification	231
3. Algebraic summation	240
4. The q -Gevrey filtration on the Stokes sheaf	247
References	250
H. UMEMURA — <i>Monodromy preserving deformation and differential Galois group I</i>	253
1. Introduction	253
2. Review of R. Fuchs' paper	256
3. Infinite dimensional differential Galois theory	257
4. Proof of Theorem 1.1	260
5. Framework of proving Theorem 1.3	264
6. Questions	266
7. Appendix : Extract from a letter of B. Malgrange to D. Bertrand	267
References	269

TABLE DES MATIÈRES DU VOLUME II

Résumés des articles	xiii
Abstracts	xvii
Avant-Propos	xxi
 F. CANO, R. MOUSSU & F. SANZ — <i>Pinceaux de courbes intégrales d'un champ de vecteurs analytique</i>	1
0. Introduction	1
1. Enlacement asymptotique et pinceau intégral	4
2. Pinceau intégral hyperbolique	13
3. Pinceau intégral central de type I	15
4. Pinceau intégral final de type II	20
5. Le cas général	28
Références	33
 B. DUBROVIN — <i>On analytic families of invariant tori for PDEs</i>	35
1. Introduction	35
2. Can one see the shape of a Riemann surface looking at the water waves? ..	42
3. Infinite genus theta-functions of Riemann surfaces without Riemann surfaces	56
References	63
 N. JOSHI, K. KAJIWARA & M. MAZZOCCO — <i>Generating Function Associated with the Determinant Formula for the Solutions of the Painlevé II Equation</i> ...	67
1. Introduction	67
2. Hankel Determinant Formula and Isomonodromic Problem	69
3. Solutions of Isomonodromic Problems and Determinant Formula	73
4. Summability of the generating function	76
References	77

V. KALOSHIN, J.N. MATHER & E. VALDINOCI — <i>Instability of resonant totally elliptic points of symplectic maps in dimension 4</i>	79
1. Introduction	79
2. Suspension of a symplectic map near totally elliptic points of a time periodic fiber-convex Hamiltonian	84
3. Scheme of construction of diffusing trajectories using Mather action functional	87
4. Mather diffusion theorem	91
5. Averaged mechanical systems corresponding to single and double resonances ..	93
6. Definition of $U_{\delta(\ell_0, \Gamma)}^s$	95
7. Definition of $W_{\delta(\ell_0, \Gamma)}^s$ using type 2 non-degeneracy (of Barrier functions) ..	101
8. Variational principle and restatement of Mather diffusion theorem	105
9. Application	106
Appendix A. Mather minimal sets	108
Appendix B. Proofs of auxiliary lemmas	111
References	114
T. KAWAI, T. KOIKE, Y. NISHIKAWA & Y. TAKEI — <i>On the Stokes geometry of higher order Painlevé equations</i>	117
0. Introduction	118
1. P_J -hierarchy with a large parameter ($J = \text{I, II-1 or II-2}$)	122
2. Relations between the Stokes geometry of the (P_J) -hierarchies and that of their underlying Lax pairs	129
3. The inevitability of the Nishikawa phenomenon	140
4. Introduction of a new Stokes curve to explain the Nishikawa phenomenon ..	144
5. Examples of Stokes geometry	154
Appendix A. Some properties of $\mathcal{K}_j$ and K_j	160
Appendix B. Another formulation of the P_I -hierarchy	163
References	165
F. LORAY — <i>Versal deformation of the analytic saddle-node</i>	167
Introduction and results	167
1. Martinet-Ramis' invariants	170
2. Proof of Theorem 1	173
3. Gluing Lemmas	175
4. Proof of Theorem 2	178
5. Proof of Theorem 4	184
References	186
C. SIMPSON — <i>Asymptotics for general connections at infinity</i>	189
1. Introduction	189
2. The compactified moduli space of connections	193
3. Curves going to infinity	194
4. Genericity results for the spectral data	196
5. Pullback to a ramified covering and gauge transformations	198