

382

ASTÉRIQUE

2016

ARITHMÉTIQUE p -ADIQUE
DES FORMES DE HILBERT

Surconvergence, ramification et modularité

Vincent Pilloni & Benoît Stroh

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

SURCONVERGENCE, RAMIFICATION ET MODULARITÉ

par

Vincent Pilloni & Benoît Stroh

Résumé. — Nous démontrons un théorème de relèvement modulaire pour les représentations galoisiennes de dimension deux, totalement impaires, de poids de Hodge-Tate nuls du groupe de Galois absolu des corps totalement réels. Ce théorème généralise un résultat bien connu de Buzzard et Taylor. Il permet de terminer la démonstration de la conjecture d’Artin pour les représentations impaires de dimension deux des groupes de Galois des corps totalement réels et de démontrer de nouveaux cas de la conjecture de Fontaine-Mazur.

Abstract (Overconvergence, ramification and modularity). — We prove a modular lifting theorem for Galois representations of dimension two over totally real fields which are totally odd with zero Hodge-Tate weights. This theorem generalizes a well-known result due to Buzzard and Taylor. It allows us to finish the demonstration of the Artin conjecture for the odd two dimensional Galois representations over totally real fields and to prove new cases of the Fontaine-Mazur conjecture.

Soit p un nombre premier et F un corps totalement réel de groupe de Galois absolu G_F . Rappelons le cas particulier suivant d’une célèbre conjecture de Fontaine et Mazur.

Conjecture 0.1. — *Soit $\rho : G_F \rightarrow \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation galoisienne géométrique totalement impaire, irréductible et de poids de Hodge-Tate nuls. Elle provient d’une forme modulaire de Hilbert de poids un propre et cuspidale pour le groupe GL_2 sur F .*

Dans cet énoncé et plus généralement dans tout l’article, « géométrique » signifie continu, non ramifié en dehors d’un nombre fini de places et potentiellement semi-stable en les places de F divisant p . Pour toute place v de F divisant p , soit $G_v \subset G_F$ un groupe de décomposition en v et I_v son sous-groupe d’inertie. D’après [41], la représentation $\rho|_{G_v}$ est potentiellement semi-stable de poids de Hodge-Tate nuls si et seulement si $\rho(I_v)$ est un groupe fini. Totalement impair signifie que $\det \rho(c_\tau) = -1$ pour toute conjugaison complexe $c_\tau \in G_F$ associée à tout plongement $\tau : F \rightarrow \mathbb{R}$.

Les représentations attachées aux formes propres de poids un ont été construites par Deligne et Serre dans [14] pour $F = \mathbb{Q}$ et par Rogawski-Tunnell [39], complétées

par Wiles [48], pour tout F . Elles sont d'image finie. En particulier, la conjecture 0.1 prédit qu'un tel ρ a également une image finie. La conjecture 0.1 est donc une forme renforcée de la conjecture d'Artin dans ce contexte, qui prédit que toute représentation $\rho : G_F \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ totalement impaire, irréductible est modulaire.

Les résultats principaux de cet article sont les suivants :

Théorème 0.2. — *Soit $\rho : G_F \rightarrow \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{Z}}_p)$ une représentation galoisienne géométrique totalement impaire, irréductible et de poids de Hodge-Tate nuls. Supposons que :*

1. p est impair.
2. $\bar{\rho}|_{G_{F(\zeta_p)}}$ est irréductible, où $\bar{\rho}$ désigne la représentation résiduelle associée à ρ et ζ_p est une racine primitive p -ième de l'unité.
3. Si $p = 5$ et $\mathrm{Proj}(\bar{\rho}(G_F)) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$, alors $[F(\zeta_5) : F] = 4$.

Alors ρ provient d'une forme modulaire de Hilbert de poids un propre et cuspidale pour le groupe GL_2 sur F .

Théorème 0.3. — *Soit F un corps totalement réel et $\rho : G_F \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ une représentation totalement impaire irréductible d'image finie. La représentation ρ est modulaire attachée à une forme propre et cuspidale de poids un. En particulier, la fonction $L(\rho, s)$ admet un prolongement holomorphe à tout le plan complexe.*

Le théorème 0.2 était connu lorsque $F = \mathbb{Q}$ en combinant les travaux de Buzzard-Taylor ([11], [9, 45]) et Khare-Wintenberger et Kisin ([26], [27]) sous l'hypothèse que la restriction de ρ à $G_{\mathbb{Q}_p}$ est la somme de deux caractères résiduellement distincts, ou est non ramifiée.

Le théorème 0.3 a été prouvé par Hecke, Langlands et Tunnell dans le cas d'image résoluble. Nous traitons ici le cas icosaédral, complétant ainsi des résultats antérieurs de Buzzard, Dickinson, Shepherd-Barron, Taylor et d'autres ([10], [44], [40], [34], [23] et [24]). Rappelons également que lorsque $F = \mathbb{Q}$, Khare [25] a prouvé que le théorème 0.3 était une conséquence de la conjecture de modularité de Serre établie dans [26].

L'ingrédient nouveau essentiel pour établir les théorèmes 0.2 et 0.3 est le théorème de relèvement modulaire suivant.

Théorème 0.4. — *Soit F un corps totalement réel et $\rho : G_F \rightarrow \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{Z}}_p)$ une représentation galoisienne géométrique de poids de Hodge-Tate nuls. Supposons que*

1. p est impair,
2. ρ est totalement impaire,
3. $\bar{\rho}|_{G_{F(\zeta_p)}}$ est irréductible,
4. si $p = 5$ et $\mathrm{Proj}(\bar{\rho}(G_F)) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$, alors $[F(\zeta_5) : F] = 4$,
5. $\bar{\rho}$ est ordinairement modulaire.

Alors ρ est modulaire, associée à une forme propre et cuspidale de poids un pour GL_2 sur F .

Dans ce théorème et dans tout l'article, une représentation résiduelle $\bar{\rho}$ est ordinairement modulaire si elle admet un relèvement modulaire qui est ordinaire.

Remarque 0.5. — Les complications pour le nombre premier 5 visibles dans l'hypothèse 4 apparaissent naturellement lors de la construction des systèmes de Taylor-Wiles (voir [28], 3.2.3). Remarquons aussi que si la conjecture 0.1 est vraie, l'image projective résiduelle $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ n'est pas possible, car ce groupe ne se relève pas en un sous-groupe fini de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_5)$. Il est peut-être possible de s'affranchir de l'hypothèse 3 en généralisant les travaux de Skinner et Wiles.

Plusieurs cas particuliers importants de ce théorème ont déjà été prouvés. Lorsque $F = \mathbb{Q}$ et

$$\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}} \simeq \chi_1 \oplus \chi_2$$

où χ_1 et χ_2 sont deux caractères distincts modulo l'idéal maximal de $\mathbb{Z}_p$, le théorème est dû à Buzzard et Taylor ([11], [9]). Lorsque $F = \mathbb{Q}$ et ρ est non ramifiée en p , il est dû à Taylor ([45]). La stratégie de tous ces articles consiste à prouver d'abord que ρ est associée à deux formes modulaires p -adiques grâce à la méthode de Taylor-Wiles, puis à prouver que ces formes p -adiques sont classiques en étudiant la courbe modulaire rigide analytique et son action de l'opérateur U_p . Notons que la méthode de Taylor-Wiles ne peut pas être appliquée naïvement aux formes modulaires classiques de poids un, ces dernières se comportant mal vis-à-vis des congruences, mais peut être appliquée aux formes modulaires p -adiques de poids un. C'est la raison de la stratégie en deux étapes esquissée précédemment.

Remarquons que dans le travail récent [12], Calegari et Geraghty ont réussi à prouver le théorème lorsque $F = \mathbb{Q}$ et ρ est globalement minimalement ramifiée et non ramifiée en p en modifiant la stratégie de Taylor et Wiles pour qu'elle puisse s'appliquer aux formes classiques de poids un.

Dans cet article, nous suivons la stratégie originelle de Buzzard et Taylor. En général, les complications de cette stratégie augmentent avec le comportement de p dans F ou la ramification de ρ en les places divisant p .

L'article [40] traite le cas où p est totalement décomposé dans F et où $\rho|_{G_v}$ est somme de deux caractères distincts modulo l'idéal maximal de $\mathbb{Z}_p$ pour tout $v \mid p$. Le cas où p est non ou modérément ramifié dans F et ρ non ramifiée en p et p -distinguée a été établi dans [23] et [34]. Finalement, le cas où p est non ramifié dans F et $\rho|_{G_v}$ est somme de deux caractères modérés distincts modulo l'idéal maximal de $\mathbb{Z}_p$ pour tout $v \mid p$ a été résolu dans [24].

D'après la théorie de Langlands et Tunnell (voir le lemme 1.1), il suffit de prouver le théorème après n'importe quel changement de base totalement réel F'/F préservant l'irréductibilité de ρ . On peut évidemment trouver un tel F'/F tel que $\rho|_{G_{F'}}$ devienne non ramifiée en toutes les places divisant p mais bien sûr, p sera en général très ramifié dans F' . Notre tâche ainsi est réduite au cas où ρ est non ramifiée en p mais F arbitrairement ramifié en p .

La première étape vers la modularité, qui consiste à prouver la modularité p -adique de ρ (de 2^r manières où r est le nombre de places au-dessus de p dans F) se généralise facilement aux corps totalement réels arbitraires. Grâce à l'argument non publié de Taylor [45], il est même possible d'éliminer l'hypothèse de distinguabilité de ρ en p . D'un autre côté, la classicité des formes p -adiques attachées à ρ est plus difficile à établir, et ceci spécialement lorsque p est très ramifié dans F . Nous avons heureusement réussi à n'imposer aucune hypothèse sur la ramification de p dans F dans cet article.

Expliquons maintenant comment nous déduisons les théorèmes 0.2 et 0.3. Nous utilisons dans un premier temps les travaux de Shepherd-Barron et Taylor ([42]) qui nous permettent de démontrer la modularité de $\bar{\rho}$ dans les cas d'image projective icosaédrale. En appliquant le théorème 0.4, nous démontrons la conjecture d'Artin dans le cas icosaédral et obtenons donc le théorème 0.3. Il nous reste ensuite à vérifier que toute représentation ρ comme dans le théorème 0.2 est d'image finie, donc justiciable du théorème 0.3. Le théorème de modularité potentielle 3.1.2 de [5] appliqué à $\bar{\rho}$, combiné au théorème 0.4, nous permet de démontrer la modularité potentielle de ρ . La finitude de ρ en découle.

Cet article est divisé en trois parties. La première contient diverses réductions ainsi que les démonstrations des théorèmes 0.2 et 0.3 à partir du théorème 0.4. La seconde aborde la méthode de Taylor-Wiles ; on y prouve le théorème de relèvement modulaire p -adique. Dans la troisième partie, on démontre le théorème de classicité. Voilà à présent le contenu plus détaillé de chacune de ces parties section par section.

Dans la première section, nous vérifions qu'il suffit de montrer le théorème 0.4 dans le cas où ρ est non ramifiée en p et résiduellement modulaire associée à une forme ordinaire de niveau et caractère central bien ajusté vis-à-vis de ρ . Nous utilisons les techniques de changement de base résoluble, d'augmentation ou de diminution du niveau. Dans la seconde section, nous expliquons comment déduire les théorèmes 0.2 et 0.3 à partir du théorème 0.4. Pour cela, nous démontrons que les représentations galoisiennes impaires d'image résiduelle projective icosaédrale deviennent résiduellement modulaires après un changement de base résoluble. Nous reproduisons essentiellement l'argument de [44], article lui-même basé sur [42].

Les sections 3, 4 et 5 traitent de déformation des représentations galoisiennes. Les résultats principaux sont obtenus dans le paragraphe 4.1 où l'on étudie les anneaux de relèvements triangulaires supérieurs. Dans ce paragraphe, nous donnons une interprétation galoisienne en les places divisant p à l'existence de diverses formes modulaires p -adiques attachées à ρ , ceci en suivant [45].

Dans la section 6, on introduit les variétés et les formes modulaires de Hilbert utilisées dans cet article. Nous prouvons un théorème de contrôle horizontal (relativement au niveau) utile pour construire plus tard les systèmes de Taylor-Wiles. Ce théorème de contrôle est une conséquence de l'annulation des images directes supérieures du faisceau structural cuspidal entre compactifications toroïdales et minimales des variétés de Hilbert.