

**DU RÔLE DE L'ENSEIGNEMENT DANS LA RECHERCHE
D'UN UNIVERSITAIRE MATHÉMATICIEN
SOUS LA TROISIÈME RÉPUBLIQUE :
LE CAS DE L'AXIOMATISATION DES PROBABILITÉS
DE MAURICE FRÉCHET (1929–1930)**

Matthias Cléry

Résumé. — Lors de son cours de l'année 1929–1930 à la chaire de calcul des probabilités et physique mathématique à Paris, Maurice Fréchet propose une axiomatisation des probabilités mobilisant le concept de fonction additive d'ensembles sur des familles additives d'ensembles. Cet article analyse les conditions (institutionnelles, pédagogiques et mathématiques) qui président à la formulation de cette axiomatisation et y met en évidence la participation conjointe et étroite de l'enseignement et de la recherche.

Abstract (The Role of Teaching in the Research of a Mathematical Scholar During the Third Republic: The Case of Maurice Fréchet's Axiomatization of Probability (1929–1930))

During his 1929–1930 course at the Chair of Probability Calculus and Mathematical Physics in Paris, Maurice Fréchet proposed an axiomatisation of probability using the concept of additive functions of sets on additive families of sets. This article analyses the conditions (institutional, pedagogical and mathematical) that led to the formulation of this axiomatisation and highlights the close and joint involvement of teaching and research.

Article reçu le 28 mars 2024, revision reçue le 6 novembre 2025, accepté pour publication le 19 décembre 2025.

M. Cléry, (1) Comité pour l'histoire du CNRS, CNRS ; (2) IDHES-Paris 8.

Courrier électronique : matthias.clery@cnrs.fr

Classification mathématique par sujets (2010) : 01A60, 60A05, 97–03.

Mots clefs : Axiomes de la théorie des probabilités, Maurice Fréchet, mathématiques du xx^e siècle, Institut Henri Poincaré, faculté des sciences de Paris, additivité dénombrable.

Key words and phrases. — Axioms of probability theory, Maurice Fréchet, 20th century mathematic, Institut Henri Poincaré, faculté des sciences de Paris, finitely enumerable additivity.

INTRODUCTION

Lors de son cours à la chaire de calcul des probabilités et de physique mathématiques (CPPM) de l'année universitaire 1929–1930, Maurice Fréchet (1878–1973) présente une axiomatisation des probabilités. Dès 1920, il avait consacré ponctuellement des enseignements de probabilité sans y proposer d'axiomatisation. Nommé maître de conférences à la chaire de CPPM le 23 octobre 1928 (AN¹, F/17/25320) dans le tout nouvel Institut Henri Poincaré (IHP), créé le 9 juillet (AN, 20010498/130), il présente cette axiomatisation dans un cours profondément remanié. De plus, il la présente à ses étudiants à la veille de débats internationaux sur ce sujet à l'IHP, avec les conférences de Richard von Mises (1883–1953) en 1931, de Francesco Paolo Cantelli (1875–1966) en 1933 et de Bruno de Finetti (1906–1985) en 1935. Fréchet exerça en outre une influence sur l'axiomatisation des probabilités, aujourd'hui considérée comme définitive, et élaborée par Andreï A. Kolmogorov (1903–1987) en 1933 [Kolmogorov 1933; Shafer & Vovk 2006a]. Finalement, dans son premier fascicule du *Traité du calcul des probabilités* de 1937 [Fréchet 1937], il se distancie de toutes ces tentatives et reprend celle présentée en 1929 qui n'avait jusqu'alors jamais été publiée. Si les axiomatisations, notamment celles de von Mises, Finetti et Kolmogorov, ont déjà été étudiées en détail², il n'en est pas de même pour celle que Fréchet proposa dans son cours de 1929, laissant donc en suspens une série d'interrogations : pourquoi Fréchet propose-t-il une axiomatisation des probabilités? Pourquoi dans un cours, à la chaire de CPPM et en 1929? Comment envisage-t-il l'axiomatisation des probabilités? Et, finalement, comment Fréchet axiomatise-t-il les probabilités?

Pour identifier et analyser les conditions qui président à la formulation de Fréchet de cette axiomatisation dans le cadre de son enseignement à la chaire de CPPM, je me suis inspiré de l'appel lancé par Bruno Belhoste [Belhoste 1998a] « pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques »³. Produite dans le contexte d'un cours, il

¹ Archives nationales.

² Voir par exemple [von Plato 1994; Shafer & Vovk 2006a; Siegmund-Schultze 2004b] ainsi que [Verburgt 2015, 414–468] pour une présentation de ces axiomatisations ou les débats qu'elles suscitèrent.

³ Cet appel a reçu de nombreuses réponses comme le montre par exemple la préface de [Gispert 2015] et la bibliographie *infra*. À l'échelle internationale, on peut également mentionner [Warwick 2003] sur le cas de la physique mathématique à Cambridge ou [Kaiser 2005] sur les relations entre enseignement et pratique scientifique.

s'agit de comprendre comment l'enseignement et la recherche participent de cette définition axiomatique, et ainsi dépasser « l'idée fausse que la production mathématique peut être séparée *a priori* par l'historien [ou l'historienne] des conditions de sa reproduction » [Belhoste 1998a, p. 289] ; en particulier, pour l'axiomatisation de Fréchet, la condition de reproduction de son axiomatisation est précisément celle de sa production. J'ai donc mené mes recherches suivant trois axes.

Tout d'abord, il s'agit d'identifier la place qu'occupe la chaire de CPPM dans l'espace universitaire et dans la carrière de Fréchet. Sous la Troisième République, un nouveau système universitaire est mis en place par une série de réformes menées entre 1880 et 1904⁴. Ces réformes visent notamment à faire des facultés des sciences des lieux de recherches scientifiques, tout en maintenant leur mission de formation intellectuelle des aspirants à l'enseignement secondaire. Dans ces circonstances, l'enseignement reste le principal facteur structurant le champ mathématique universitaire et les carrières qui s'y tracent. Après avoir caractérisé la singularité de la chaire de CPPM au sein du système universitaire mathématique, l'analyse des mécanismes de sélection qui permettent à Fréchet d'y accéder rend compte des dispositions acquises dans sa trajectoire qui en font un candidat de premier rang pour cette chaire. La rencontre entre Fréchet et cette chaire définit un espace des possibles dans lequel se situe son axiomatisation des probabilités.

Ensuite, comme le rappelle Belhoste [Belhoste 1998a, p. 295], l'activité scientifique et professorale des universitaires mathématiciens est aussi régulée par des représentations. Il s'agit alors de comprendre comment Fréchet conçoit et oriente son activité mathématique, dans sa recherche et son enseignement. Il s'avère que sa nomination à Strasbourg⁵ l'encourage à expliciter sa conception de la recherche et de l'enseignement, et en particulier le rôle de l'axiomatisation dans l'une et l'autre. En outre, à Strasbourg, Fréchet engage une réorientation de son activité universitaire vers le calcul des probabilités [Fréchet & Halbwachs 2019] en en faisant un sujet d'enseignement et de recherches mathématiques. Fréchet s'engage dans les probabilités en s'enracinant dans les applications mais en se dirigeant vers la théorie qui, suite à sa nomination à l'IHP et son cours de 1929, prend nettement le dessus.

⁴ Sur l'université mise en place sous la Troisième République, on peut consulter notamment [Luc et al. 2020] et les références *infra* ; pour les mathématiques, voir [Gispert 1989a] et [Gispert 2015].

⁵ Sur Fréchet à l'université de Strasbourg, voir notamment [Mazliak 2010a ; Siegmund-Schultze 2005a].

Il reste alors à comprendre comment Fréchet met en pratique ces représentations à la chaire de calcul des probabilités pour formuler cette définition axiomatique des probabilités. Comme le rappelle Belhoste, « compte tenu du rôle joué par l'activité didactique dans le champ disciplinaire des mathématiques, on ne s'étonnera pas de voir les pratiques d'enseignement agir sur et interférer avec les pratiques de recherches » [Belhoste 1998a, p. 298]. En dépliant l'axiomatisation des probabilités formulée par Fréchet au premier semestre de l'année 1929–1930, il s'agit de mettre en lumière comment il met en pratique sa conception du lien entre enseignement et recherche et comment intervient l'axiomatisation. Mise ainsi à plat, cette axiomatisation témoigne de l'importante porosité dans l'activité mathématique de Fréchet entre enseignement et recherche qu'il s'agit de caractériser. Enfin, c'est aussi par la pratique de l'enseignement qu'une telle axiomatisation est susceptible d'opérer une transformation des représentations au sein du champ probabiliste sur le temps long; transformations que j'esquisse brièvement.

1. L'ACCÈS À LA SINGULIÈRE CHAIRE DE CPPM : L'EXPÉRIENCE DE FRÉCHET DE LA MÉCANIQUE DU CHAMP UNIVERSITAIRE MATHÉMATIQUE FRANÇAIS

La chaire de CPPM occupe une place unique dans le champ universitaire mathématique français au cours de l'entre-deux-guerres et plus encore suite à la création de l'IHP en 1928. Sa position singulière au sein de l'institution tient à la spécificité de son enseignement portant sur l'actualité de la recherche probabiliste internationale. Dans ces circonstances, l'accès à la maîtrise de conférences de CPPM est le produit d'un processus de sélection dont Maurice Fréchet sort comme l'incontestable candidat idéal par ses qualités d'enseignant et par les dispositions sociales qu'il a acquises au cours de sa trajectoire universitaire.

1.1. Une chaire unique au sein des universités de la Troisième République : un enseignement de la recherche probabiliste internationale (1928–1939)

Cantonnées à la collation des grades et à leur préparation pendant le XIX^e siècle, les facultés des sciences sont dotées d'une mission de recherche par des réformes universitaires au tournant du XX^e siècle. Impulsées par le ministre de l'Instruction publique Jules Ferry (1832–1893)

dans une circulaire du 8 mai 1880 [de Beauchamp 1884, p. 461], réclamant que seules les thèses présentant des faits scientifiques nouveaux soient autorisées à être soutenues, la mission de recherche des facultés est mise sur les épaules des professeurs dans une circulaire du 18 février 1883. Le ministre Jules Duvaux (1827–1902) y rappelle que, outre la préparation aux grades, les professeurs « ont d'autres obligations envers l'État » : faire de la recherche et former à la recherche [de Beauchamp 1884, p. 705–706]. Laisseée d'abord à l'initiative des professeurs, l'arrêté du 18 juin 1904 [Généres 1909, p. 615–616] instituant des diplômes d'études supérieures dans les facultés des sciences tente d'encadrer cette formation à la recherche, ce qui, dans le cas des mathématiques, est réduit à l'obtention d'un certificat d'études supérieures de géométrie supérieure, d'analyse supérieure, de mécanique céleste, de mécanique physique et expérimentale ou enfin de physique mathématique (devenu à Paris en 1926, calcul des probabilités et physique mathématique).

Cet arrêté de 1904 cristallise vraisemblablement un état de fait depuis (au moins) la réforme de la licence ès sciences de 1896⁶. Le décret du 22 janvier 1896 [Généres 1898, p. 556–557] modifie la collation de ce grade désormais délivré après l'obtention de trois certificats d'études supérieures librement choisis par l'étudiant, sauf pour les aspirants aux fonctions de l'enseignement secondaire public qui, en mathématique, sont limités aux certificats de calcul différentiel et intégral, de mécanique rationnelle, d'astronomie ou un autre de l'ordre des sciences mathématiques. L'arrêté de 1904 fixe ainsi une hiérarchie entre des certificats de licence et des certificats de doctorat qui s'instaure dans les facultés, surtout à Paris, et les enseignements qui y sont faits ; une distinction dont témoigne, par exemple, Henri Lebesgue lors du conseil de faculté du 24 janvier 1920 :

M. Lebesgue pense qu'on doit distinguer entre l'enseignement des mathématiques fait en vue de la licence et l'enseignement fait en vue du doctorat. [...] Ce n'est [...] que dans 2 ou 3 chaires qu'on s'occupe de mathématiques vivantes, qu'on apprend à travailler, qu'on enseigne des sujets qui peuvent fournir matière à des thèses. (AN AJ/16/5123, p. 293–294)

Cette hiérarchie des enseignements mathématiques contribue à une hiérarchie entre les facultés des sciences en France. Par exemple, lorsque Fréchet est nommé à Rennes (1908) puis à Poitiers (1909), ces facultés ne comptent que deux chaires de mathématiques (calcul différentiel et intégral et mécanique rationnelle). Faute d'un autre enseignement de

⁶ Sur la licence ès sciences, on pourra consulter [Verschuere 2023]