

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PHILIPPE ROBBA

Une introduction naïve aux cohomologies de Dwork

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 23 (1986), p. 61-105

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1986_2_23__61_0

© Mémoires de la S. M. F., 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE INTRODUCTION NAÏVE
AUX COHOMOLOGIES DE DWORK

Philippe ROBBA

La démonstration originelle de Dwork de la rationalité de la fonction zêta pour les variétés [Dw.1] semblait de nature non cohomologique. En fait, une théorie cohomologique p -adique était sous-jacente à cette démonstration ainsi que le montrait l'article [Dw.4], où Dwork déterminait le degré de la fonction zêta associée à une hypersurface sous des hypothèses de non-singularité.

Inspirés par les résultats de Dwork, Monsky et Washnitzer ont développé une théorie cohomologique p -adique formelle ([MW.1], [MW.2], [Mo.1]) d'inspiration plus géométrique.

Bien entendu, pour la vérification des autres conjectures de Weil, une théorie cohomologique complète était indispensable. Un échec majeur des théories de Dwork et Monsky-Washnitzer était de ne pouvoir démontrer en général la finitude des cohomologies (Monsky démontre la finitude dans le cas des courbes [Mo.1]).

Pour ces raisons, on a vu se développer, avec le succès que l'on connaît, les théories de cohomologie ℓ -adique et cristalline.

Néanmoins, la théorie de Dwork a, sur ses concurrentes, l'avantage de la simplicité, de son caractère explicite, et du point de vue "surconvergent". (Dans l'article de Berthelot, on verra comment le point de vue "surconvergent" peut être introduit dans la théorie cristalline de façon à obtenir une théorie qui englobe la théorie cristalline, la théorie de Dwork et la théorie de Monsky-Washnitzer). C'est pourquoi cette théorie a continué à rendre de grands services comme par exemple dans l'estimation du degré des fonctions L , l'étude p -adique des fonctions hypergéométriques ou des fonctions de Bessel, grâce à la théorie de la déformation, l'estimation de la valuation p -adique des racines des fonctions L , la formule de Gross-Koblitz pour les sommes de Gauss et sa généralisation.

Malheureusement, les idées de base de la méthode de Dwork se trouvent bien cachées au milieu de complexes calculs. Nous espérons que cet exposé pourra servir de fil conducteur pour la lecture des articles utilisant les méthodes de Dwork. Si les idées de base n'ont pas changé depuis les premiers articles de Dwork, certaines améliorations techniques ont été apportées, surtout sous l'influence de la théorie de Monsky-Washnitzer. Nous avons autant que possible tenu compte de ces améliorations et nous n'avons pas hésité à nous éloigner des notations de Dwork pour souligner le côté cohomologique et pour travailler sans bases.

A titre d'application, nous montrons comment la formule de trace permet d'utiliser les cohomologies de Dwork pour l'étude des fonctions L (dès le début, Serre avait observé que les méthodes de Dwork s'appliquaient à l'étude des fonctions L).

Nous n'avons développé la théorie duale que dans le cas d'une variable car il nous semble que dans le cas de plusieurs variables, la théorie n'a pas atteint la même maturité. On pourra consulter [Dw.5][Dw.6][Sp.1] pour le cas de plusieurs variables.

Pour ce qui est des équations différentielles p-adiques étudiées par des méthodes cohomologiques, des résultats généraux ont été établis par Dwork et Katz dans le cas des équations de Picard-Fuchs. D'autres cas particuliers ont été étudiés, parfois de façon très approfondie, par Dwork, Adolphson, Sperber, Baldassarri. Il serait souhaitable que les résultats particuliers obtenus soient unifiés dans une théorie générale. Le paragraphe 6 de cet exposé espère, malgré ses défauts, effectuer un premier pas en vue de cette systématisation.

Nous n'avons pas mis de références au cours du texte. Nous renvoyons le lecteur à la bibliographie thématique pour les références correspondant aux différentes parties de cet exposé.

I. - L'ESPACE DAGUE DE MONSKY-WASHNITZER

Pour $x \in \mathbb{C}_p^n$ et $v \in \mathbb{N}^n$ on pose

$$|x| = \max_i |x_i|, \quad x^v = x_1^{v_1} \dots x_n^{v_n}.$$

Si $x \in \mathbb{C}_p$, \bar{x} désignera son image dans le corps résiduel.

Pour $P \in \mathbb{C}_p[X] = \mathbb{C}_p[X_1, \dots, X_n]$, $P = \sum_v a_v X^v$, on pose $|P| = |P|_{\text{gauss}} = \max_v |a_v|$.

Ceci définit une valeur absolue ultramétrique sur $\mathbb{C}_p[X]$ qui s'étend à $\mathbb{C}_p(X)$.

Soit $g \in \mathbb{C}_p[X]$, avec $|g|_{\text{gauss}} = 1$. On pose

$$A = \{x \in \mathbb{C}_p^n ; |g(x)| = 1 \text{ et } |x| \leq 1\} = \{x \in \mathbb{C}_p^n ; |g(x)| \geq 1 \text{ et } |x| \leq 1\}$$

(A est le relèvement en caractéristique 0 du complémentaire de l'hypersurface d'équation $\bar{g}(x) = 0$ en caractéristique p) et pour chaque $e < 1$ on considère les "voisinnages tubulaires ouverts et fermés" de A

$$A_e^- = \{x \in \mathbb{C}_p^n ; |g(x)| > e \text{ et } |x| < 1/e\}$$

$$A_e^+ = \{x \in \mathbb{C}_p^n ; |g(x)| \geq e \text{ et } |x| \leq 1/e\}.$$

On note $\mathcal{K}(A_e^+)$ l'algèbre des éléments analytiques sur A_e^+ (à coefficients dans \mathbb{C}_p) c'est-à-dire l'espace des limites uniformes sur A_e^+ de fractions rationnelles sans singularités dans A_e^+ .

L'espace dague $\mathcal{K}^+(A)$ de Monsky-Washnitzer

$$\mathcal{K}^+(A) = \bigcup_{e < 1} \mathcal{K}(A_e^+) = \lim_{e \rightarrow 1} \text{ind } \mathcal{K}(A_e^+).$$

On considérera aussi l'espace des fonctions analytiques sur A_e^-

$$\mathcal{A}(A_e^-) = \bigcap_{e' > e} \mathcal{H}(A_{e'}^+) = \lim_{e' \nearrow e} \text{proj } \mathcal{H}(A_{e'}^+) .$$

On a également

$$\mathcal{H}^+(A) = \bigcup_{e < 1} \mathcal{A}(A_e^-) .$$

Nous utiliserons souvent la propriété suivante : si la série entière à une variable $v = \sum_{i \geq 0} a_i x^i$ a un rayon de convergence R et si $u \in \mathcal{H}^+(A)$ vérifie

$$|u|_{\text{gauss}} < R, \text{ alors } v \circ u \in \mathcal{H}^+(A) .$$

On observera que $\mathcal{H}^+(A)$ ne dépend que de A et donc que de $\bar{g} \in F_\infty[X]$ (on note par F_∞ la clôture algébrique de F_p), alors que $\mathcal{H}(A_e^+)$ et $\mathcal{A}(A_e^-)$ peuvent dépendre du choix du relèvement g de \bar{g} .

Nous avons adopté les définitions de fonctions analytiques à la Krasner par goût personnel, les définitions en terme de fonctions analytiques rigides à la Tate sont équivalentes (et peut-être mieux adaptées au problème considéré).

Cas particulier de la dimension 1 ($n = 1$)

Alors l'ensemble A est de la forme

$$A = B(0, 1^+) - \bigcup_{j=1}^s B(c_j, 1^-)$$

où les $B(c_j, 1^-)$ sont des classes résiduelles distinctes. On peut pour définir $\mathcal{H}^+(A)$ supposer que $g(x) = \prod_j (x - c_j)$. Alors

$$A_e^+ = B(0, (1/e)^+) - \bigcup_{j=1}^s B(c_j, e^-)$$

et

$$\mathcal{H}(A_e^+) = \left\{ f = \sum_{i \geq 0} a_i x^i + \sum_j \sum_{i \geq 1} \frac{a_{j,i}}{(x - c_j)^i} ; \lim_i |a_i| e^{-i} = 0 , \right.$$

$$\left. \forall j \lim_i |a_{j,i}| e^{-i} = 0 \right\} .$$