

**465**

**ASTÉRISQUE**

**2026**

QUASI-FIBERED BOUNDARY  
PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS

C. Kottke & F. Rochon

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

---

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 465, 2026

---

*Comité de rédaction*

Thierry BODINEAU      Alessandra IOZZI  
Eleonora DI NEZZA      Rémi RHODES  
Cécile HUNEAU      Sug WOO SHIN  
Antoine CHAMBERT-LOIR (dir.)

*Diffusion*

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
<a href="mailto:commandes@smf.emath.fr">commandes@smf.emath.fr</a>	<a href="http://www.ams.org">http://www.ams.org</a>

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 59 € (\$ 89)

*Abonnement* Europe : 818 €, hors Europe : 889 € (\$ 1 333)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat*

Astérisque  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Fax: (33) 01 40 46 90 96  
[asterisque@smf.emath.fr](mailto:asterisque@smf.emath.fr) • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2026

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-37905-229-3

doi:10.24033/ast.1269

Directrice de la publication : Isabelle Gallagher

---

**465**

**ASTÉRISQUE**

**2026**

QUASI-FIBERED BOUNDARY  
PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS

C. Kottke & F. Rochon

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

*Chris Kottke*

Division of Natural Sciences, New College of Florida, 5800 Bay Shore Rd., Sarasota, FL 34243, USA

Department of Mathematics, Reed College, 3203 SE Woodstock Blvd., Portland, OR 97202, USA

ckottke@ncf.edu, ckottke@reed.edu

*Frédéric Rochon*

Département de Mathématiques, UQAM, C. P. 8888 succ. Centre-Ville, Montréal QC H3C 3P8, Canada

rochon.frederic@uqam.ca

Reçu le 29 juillet 2022, révisé le 6 mars 2024, accepté le 19 novembre 2024.

---

*Mathematical Subject Classification* (2010). – 58J05, 58J40.

*Keywords.* – Quasi-fibered boundary pseudodifferential operators, wedge operators, low energy limit of the resolvent, manifolds with corners.

*Mots-clefs.* – Opérateurs pseudo-différentiels quasi-fibrés au bord, opérateurs wedges, limite à faible énergie de la résolvante, variétés à coins.

The authors are grateful to Rafe Mazzeo, Richard Melrose and Michael Singer for stimulating discussions related to their project, as well as to two anonymous referees for many helpful suggestions to improve the manuscript. CK was supported by NSF Grant No. DMS-1811995. In addition, this material is based in part on work supported by the NSF under Grant No. DMS-1440140 while CK was in residence at the Mathematical Sciences Research Institute in Berkeley, California, during the Fall 2019 semester. FR was supported by NSERC and a Canada Research chair.

# QUASI-FIBERED BOUNDARY PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS

by

C. Kottke & F. Rochon

*Abstract.* – We develop a pseudodifferential calculus for differential operators associated to quasi-fibered boundary metrics (QFB metrics), a class of metrics including the quasi-asymptotically conical metrics (QAC metrics) of Degeratu-Mazzeo and the quasi-asymptotically locally Euclidean metrics (QALE metrics) of Joyce. Introducing various principal symbols, we introduce the notion of fully elliptic QFB operators and show that those are Fredholm when acting on QFB Sobolev spaces. For QAC metrics, we also develop a pseudodifferential calculus for the conformally related class of Qb metrics. We use these calculi to construct a parametrix for the Hodge-de Rham operator of certain QFB metrics, allowing us to show that it is Fredholm on suitable Sobolev spaces and that the space of L2 harmonic forms is finite dimensional. Our parametrix is obtained by inverting certain model operators at infinity, inversions that we achieve in part through a fine understanding of the low energy limit of the resolvent of the Hodge-de Rham operator. Our parametrix also implies that L2 harmonic forms decay faster at infinity than an arbitrary L2 form, the extra decay being quantified in terms of a small negative power of the distance function. This decay of L2 harmonic forms is used in a companion paper to study the L2 cohomology of some QFB metrics.

*Résumé* (Opérateurs pseudo-différentiels quasi-fibrés au bord). – Nous développons un calcul pseudodifférentiel pour les opérateurs différentiels associés aux métriques quasi-fibrées au bord (métriques QFB), une classe de métriques comprenant les métriques quasi-asymptotiquement coniques (métriques QAC) de Degeratu-Mazzeo et les métriques quasi-asymptotiquement localement euclidiennes (métriques QALE) de Joyce. En introduisant divers symboles principaux, nous introduisons la notion d'opérateurs QFB entièrement elliptiques et montrons que ceux-ci sont de Fredholm lorsqu'ils agissent sur des espaces de Sobolev QFB. Pour les métriques QAC, nous développons également un calcul pseudo-différentiel pour la classe des métriques Qb, qui leur est liée de manière conforme. Nous utilisons ces calculs pour construire une paramétrix de l'opérateur de Hodge-de Rham de certaines métriques QFB, ce qui nous permet de montrer qu'il est de Fredholm sur des espaces de Sobolev appropriés

et que l'espace des formes harmoniques  $L^2$  est de dimension finie. Notre paramétrix est obtenue en inversant certains opérateurs modèles à l'infini, inversions que nous réalisons en partie grâce à une compréhension fine de la limite à faible énergie de la résolvante de l'opérateur de Hodge-de Rham. Notre paramétrix implique également que les formes harmoniques  $L^2$  décroissent plus rapidement à l'infini qu'une forme  $L^2$  arbitraire, cette décroissance supplémentaire étant quantifiée en termes d'une petite puissance négative de la fonction de distance. Cette décroissance des formes harmoniques  $L^2$  est utilisée dans un article complémentaire pour étudier la cohomologie  $L^2$  de certaines métriques QFB.

# CONTENTS

<b>Introduction</b> .....	1
<b>1. QFB structures</b> .....	11
<b>2. The QFB double space</b> .....	21
<b>3. QFB pseudodifferential operators</b> .....	31
<b>4. The QFB triple space</b> .....	43
<b>5. Composition of QFB operators and Qb operators</b> .....	55
<b>6. Symbol maps of QFB operators</b> .....	63
<b>7. Mapping properties of QFB operators</b> .....	73
<b>8. Symbol maps for Qb operators and the edge calculus</b> .....	81
<b>9. Parametrix construction of Dirac QFB operators</b> .....	97
Step 0: Symbolic inversion .....	109
Step 1: Inversion at $\text{ff}_i$ for $H_i$ maximal .....	110
Step 2: Inversion at $H_{ii}$ for $H_i$ maximal .....	111
Step 3: Inversion at $\text{ff}_i$ for $H_i$ not maximal .....	116
Step 4: Inversion at $H_{ii}$ for $H_i$ not maximal .....	117
Step 5: Final improvement of the error term .....	117
<b>10. <math>\mathcal{H}</math>, QFB operators</b> .....	125
<b>11. The <math>\mathcal{H}</math>, QFB triple space</b> .....	139
<b>12. Composition of <math>\mathcal{H}</math>, QFB pseudodifferential operators</b> .....	145
<b>13. Symbol maps</b> .....	151
<b>14. Resolvent of a QFB Dirac operator in the low energy limit</b> .....	155
<b>15. Inverse of a non-fully elliptic suspended Dirac QFB operator</b> .....	169
<b>16. Resolvent of a suspended QFB Dirac operator in the low energy limit</b> .....	179
<b>17. Results for Hodge-de Rham QFB operators</b> .....	195

<b>Index</b> .....	201
<b>Bibliography</b> .....	203