

# BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LESIGNE

## **Équations fonctionnelles, couplages de produits gauches et théorèmes ergodiques pour mesures diagonales**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 121, n° 3 (1993), p. 315-351

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1993\\_\\_121\\_3\\_315\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1993__121_3_315_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**ÉQUATIONS FONCTIONNELLES,  
COUPLAGES DE PRODUITS GAUCHES ET  
THÉORÈMES ERGODIQUES POUR  
MESURES DIAGONALES**

PAR

E. LESIGNE (\*)

---

RÉSUMÉ. — On étudie certaines propriétés ergodiques des systèmes dynamiques mesurés qui sont des extensions isométriques abéliennes de systèmes à spectre discret. On démontre pour ces systèmes un théorème ergodique ponctuel du type «récurrence multiple». On définit pour ces extensions une notion d'irréductibilité. Sous cette condition d'irréductibilité, les couplages d'extensions ont des propriétés remarquables. Si cette condition n'est pas satisfaite, le système étudié est un facteur d'une translation sur un quotient compact de groupe nilpotent.

ABSTRACT. — We study some ergodic properties of measure preserving dynamical systems which are abelian isometric extensions of discrete spectrum systems. We prove for these systems a pointwise ergodic theorem of the type «multiple recurrence». We define for these extensions an irreducibility condition. Under this condition, the joinings of extensions have good properties. If this condition is not satisfied, the system appears as a factor of a translation on a compact quotient of nilpotent group.

### Introduction

On désigne par  $(X, +)$  un groupe compact abélien métrisable et connexe, par  $T : x \mapsto x + \alpha$  une translation ergodique de  $X$ .

Si  $(G, \cdot)$  est un groupe compact abélien métrisable, on appelle *cocycle* de  $X$  dans  $G$  toute application mesurable de  $X$  dans  $G$ . Si  $\varphi$  est un tel cocycle, on lui associe un système dynamique mesuré

$$\mathcal{S}_\varphi = (X \times G, \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(G), m_X \otimes m_G, T_\varphi),$$

---

(\*) Texte reçu le 22 janvier 1992, révisé le 11 septembre 1992.

E. LESIGNE, Université de Tours, Faculté des Sciences et Techniques, Département de Mathématiques, Parc de Grandmont, 37200 Tours.

Classification AMS : 28D.

où  $\mathcal{B}(\cdot)$  et  $m$  désignent respectivement les tribus boréliennes et les probabilités de Haar des groupes considérés, et où la transformation  $T_\varphi$  est définie par  $T_\varphi(x, g) = (x + \alpha, g \cdot \varphi(x))$ .

Nous allons établir des liens entre propriétés ergodiques du système  $\mathcal{S}_\varphi$  et propriétés du cocycle  $\varphi$ .

Nous commencerons par rappeler des définitions usuelles et des résultats connus.

On notera  $\mathbb{U}$  le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

DÉFINITION 1. — Le cocycle  $\varphi$  est dit *ergodique* si le système  $\mathcal{S}_\varphi$  est ergodique.

DÉFINITION 2. — Le cocycle  $\varphi$  est dit *faiblement mélangeant* si il est ergodique et si les spectres ponctuels de  $T_\varphi$  et  $T$  sont les mêmes, ou — de façon équivalente — si les seules fonctions propres pour l'action de  $T_\varphi$  sur  $L^2(X \times G)$  sont les produits d'une constante et d'un caractère de  $X$ .

DÉFINITION 3. — Le cocycle  $\varphi$  est appelé un *cobord* si il existe une application mesurable  $\psi$  de  $X$  dans  $G$  telle que

$$\varphi = \psi \circ T \cdot \psi^{-1} \quad (\text{p.p}).$$

Le cocycle  $\varphi$  est appelé un *quasi-cobord* si il existe  $g$  dans  $G$  tel que  $\varphi \cdot g$  soit un cobord.

PROPOSITION 1 (cf. [A]). — Soit  $\varphi$  un cocycle de  $X$  dans  $G$ .

a)  $\varphi$  est ergodique si et seulement si il n'existe pas de caractère non trivial  $\sigma$  de  $G$  tel que  $\sigma \circ \varphi$  soit un cobord (de  $X$  dans  $\mathbb{U}$ ).

b)  $\varphi$  est faiblement mélangeant si et seulement si il n'existe pas de caractère non trivial  $\sigma$  de  $G$  tel que  $\sigma \circ \varphi$  soit un quasi-cobord (de  $X$  dans  $\mathbb{U}$ ).

Voici la première définition originale.

DÉFINITION 4. — Un cocycle  $\varphi$  de  $X$  dans  $G$  sera dit *irréductible* si, pour tout caractère non trivial  $\sigma$  de  $G$ ,

$$\left\{ t \in X : \sigma \circ \varphi(x + t) / \sigma \circ \varphi(x) \text{ est un quasi-cobord (de } X \text{ dans } \mathbb{U}) \right\}$$

est négligeable.

REMARQUE. — Les cinq notions introduites dans les définitions précédentes dépendent bien sûr du choix de  $\alpha$  dans  $X$ ; nous devrions parler par exemple de cocycle  $\alpha$ -irréductible. Nous nous en dispenserons quand il n'y aura pas d'ambiguïté sur le choix de la translation sur  $X$ .

L'étude de la condition d'irréductibilité est développée dans la suite. On y démontre en particulier que si  $\varphi$  est un cocycle de  $X$  dans  $\mathbb{U}$  tel que, pour un ensemble non négligeable de valeurs de  $t$ , le cocycle  $\varphi(x+t)/\varphi(x)$  est un quasi-cobord, alors le système dynamique  $\mathcal{S}_\varphi$  est facteur d'une translation sur un quotient compact de groupe nilpotent. Dans le cas où  $X$  est le tore de dimension 1, cette condition sur  $\varphi$  entraîne que le système dynamique  $\mathcal{S}_\varphi$  est à spectre quasi-discret.

Remarquons que si  $\varphi$  est un cocycle de  $X$  dans  $\mathbb{U}$ , l'ensemble

$$\{t \in X : \varphi(x+t)/\varphi(x) \text{ est un quasi-cobord}\}$$

est un sous-groupe de  $X$ , stable sous la translation  $T$ , et mesurable (PROPOSITION 2). Si cet ensemble est non négligeable, il est donc égal à  $X$ .

EXEMPLES :

a) Les exemples immédiats de cocycles non irréductibles sont les cocycles affines, ou les cocycles ne différant d'un cocycle affine que par un cobord, c'est-à-dire les cocycles  $\varphi$  de la forme

$$\varphi(x) = \rho(x) \cdot \tilde{\varphi}(x)$$

où  $\rho$  est un homomorphisme de  $X$  dans  $G$  et  $\tilde{\varphi}$  est un quasi-cobord. H. FURSTENBERG et B. WEISS ont remarqué les premiers qu'il existe des cocycles non irréductibles qui ne sont pas du type précédent; ils ont noté le rôle important joué par les structures nilpotentes dans ce problème (voir le paragraphe II).

b) Quand  $X$  est le tore  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , on peut donner des exemples de cocycles en escalier qui sont irréductibles, grâce au travail de J.-P. CONZE présenté dans [C]. Examinons le cas où  $G = \mathbb{U}$ . On a alors, d'après [C] : pour tout entier  $k \geq 2$ , pour presque tous  $\alpha, t_1, \dots, t_k, a_1, \dots, a_k$  dans  $\mathbb{T}$ , le cocycle  $\varphi$  en escalier admettant  $t_1, t_2, \dots, t_k$  comme points de discontinuité et prenant les valeurs  $e^{2i\pi a_1}, \dots, e^{2i\pi a_k}$  est  $\alpha$ -irréductible. Une condition suffisante d'irréductibilité peut être donnée par des conditions diophantiennes sur  $\alpha, t_1, \dots, t_k, a_1, \dots, a_k$ . Par exemple (en notant, pour tout réel  $x$ ,  $\|x\| = \inf_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$ ) : si  $\alpha$  et  $t$  sont dans  $[0, 1[$  et vérifient « il existe une suite strictement croissante d'entiers  $(k_n)$  telle que  $\sup_n k_n \|k_n \alpha\| < \frac{1}{16}$  et  $\inf_n \|k_n t\| > \frac{1}{4}$  » et si  $a$  est irrationnel, alors le cocycle

$$\varphi = \exp(2i\pi a \cdot \mathbf{1}_{[0, t[})$$

de  $\mathbb{T}$  dans  $\mathbb{U}$  est  $\alpha$ -irréductible.

c) On trouvera également une construction de cocycle en escalier irréductible dans [Lem].

**Énoncés des théorèmes.** — Soit  $\varphi$  un cocycle de  $X$  dans  $G$ . Si  $\varphi$  n'est pas irréductible alors il existe un caractère non trivial  $\sigma$  de  $G$  tel que, pour tout  $t$  dans  $X$ , le cocycle  $\sigma\varphi(x+t)/\sigma\varphi(x)$  soit un quasi-cobord. D'après la PROPOSITION 1, on en déduit que si  $\varphi$  n'est pas irréductible, alors, pour tout  $t$  dans  $X$ , le cocycle  $(\varphi(x), \varphi(x+t))$  de  $X$  dans  $G^2$  n'est pas faiblement mélangeant et le cocycle  $(\varphi(x), \varphi(x+t), \varphi(x+2t))$  de  $X$  dans  $G^3$  n'est pas ergodique. Nous allons voir que la réciproque est vraie, et même beaucoup plus.

**THÉORÈME 1.** — Soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite de cocycles de  $X$  dans  $G$ ; à tout  $t$  dans  $X$ , on associe un cocycle  $\varphi_t^{\mathbb{Z}}$  de  $X$  dans  $G^{\mathbb{Z}}$  défini par :

$$\varphi_t^{\mathbb{Z}}(x) = (\varphi_n(x + nt))_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Si tous les  $\varphi_n$  sont irréductibles, alors, pour presque tout  $t$ , le cocycle  $\varphi_t^{\mathbb{Z}}$  est faiblement mélangeant.

*Application.* — Si  $\varphi$  est un cocycle irréductible de  $X$  dans  $G$ , alors, pour presque tout  $t$  dans  $X$ , le cocycle  $\varphi_t^{\mathbb{N}}(x) = (\varphi(x + nt))_{n \in \mathbb{N}}$  de  $X$  dans  $G^{\mathbb{N}}$  est ergodique. Le système  $\mathcal{S}_{\varphi_t^{\mathbb{N}}}$  est un autocouplage infini, ergodique et non coalescent du système  $\mathcal{S}_{\varphi}$ . Dans [Lem], M. LEMANCZYK utilise une construction de ce type pour donner des exemples de systèmes dynamiques faiblement isomorphes, non isomorphes.

**THÉORÈME 2.** — Soit  $p$  un entier  $> 0$  et  $(\varphi_j)_{-p \leq j \leq p}$  une famille de cocycles de  $X$  dans  $G$ . On note  $T_j$  la transformation  $T_{\varphi_j}$  de  $X \times G$ .

Pour tous  $f_{-p}, f_{-p+1}, \dots, f_p$  dans  $L^\infty(X \times G)$ , pour presque tout  $(x, g)$  dans  $X \times G$ , la suite

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{j=-p}^p f_j(T_j^{jk}(x, g))$$

est convergente.

L'intérêt du THÉORÈME 2 est lié à la question suivante : soit  $(\Omega, \mathcal{J}, \mu, S)$  un système dynamique mesuré et  $f_{-p}, f_{-p+1}, \dots, f_p$  des fonctions mesurables bornées sur  $\Omega$ ; la suite

$$(1) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{j=-p}^p f_j(S^{jk}\omega)$$

est-elle convergente ?