BULLETIN DE LA S. M. F.

MOHAMED MKAOUAR

Sur le développement en fraction continue de la série de Baum et Sweet

Bulletin de la S. M. F., tome 123, nº 3 (1995), p. 361-374
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1995__123_3_361_0>

Bull. Soc. math. France,
123, 1995, p. 361–374.

SUR LE DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE DE LA SÉRIE DE BAUM ET SWEET

PAR

MOHAMED MKAOUAR (*)

RÉSUMÉ. — Baum et Sweet ont donné en 1976 un exemple d'élément algébrique sur $\mathbb{F}_2(X)$ de degré 3 dont le développement en fraction continue est à quotients partiels de degrés bornés. L'objet principal de ce travail est de montrer d'une part que ce développement n'est pas engendré par un automate fini et d'autre part qu'il est engendré par une substitution de longueur non constante sur un alphabet à 20 lettres.

ABSTRACT. — Baum and Sweet gave in 1976 an example of algebraic element on $\mathbb{F}_2(X)$ of degree 3 which has a bounded continued fraction expansion. Our principal result is first to prove that this expansion is not generated by a finite automaton, and then that it is generated by a finite substitution of non-constant length on an alphabet of 20 letters.

1. Introduction

On ne connaît aucun nombre réel algébrique de degré supérieur à 3, dont le développement en fraction continue est à quotients partiels bornés (voir par exemple [SHA] et [P-S]). Plus de choses sont connues dans le cas des séries formelles

$$\sum a_n X^{-n}$$

sur un corps fini $\mathbb{F}_p$ de caractéristique p qui sont algébriques sur le corps de fractions rationnelles $\mathbb{F}_p(X)$: en 1976, BAUM et SWEET ont donné dans [B-S1] le premier exemple d'une série formelle de degré 3 en caractéristique $p = 2$, dont les quotients partiels ne prennent qu'un nombre fini de valeurs ainsi que des exemples dont les quotients partiels prennent une infinité de valeurs. Ce travail a été poursuivi par BAUM et

(*) Texte reçu le 8 juillet 1993, révisé le 6 décembre 1993 et le 24 janvier 1994.
M. MKAOUAR, Faculté des Sciences de Sfax, Département de Mathématiques, Sfax 3038, Tunisie.
Classification AMS : 11A55, 11B85, 30B70.

SWEET dans [B-S2]. Comme l'algébricité de $f = \sum a_n X^{-n}$ équivaut à la p-automaticité de la suite (a_n) d'après le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy [C-K-M-R], MENDÈS FRANCE a posé la question naturelle suivante : *si les quotients partiels de f ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, forment-ils eux aussi une suite p-automatique ?*

En d'autres termes ce type de régularité de la suite (a_n) passe-t-il à la suite des quotients partiels? On voit que la réponse à cette question suppose qu'on sache, d'une part identifier les séries algébriques à quotients partiels prenant un nombre fini de valeurs, d'autre part, donner une expression (explicite) de ces quotients partiels, enfin montrer la p-automaticité en utilisant ce développement explicite. En 1986, MILLS et ROBBINS ont donné des exemples de telles séries avec des développements en fraction continue explicites, et en particulier les seuls exemples connus en caractéristique $p > 2$ [M-R].

En 1988, ALLOUCHE, BÉTRÉMA et SHALLIT ont montré dans [ALL1] et [A-B-S] que, pour chaque exemple donné dans [M-R], avec $p > 3$, la suite des quotients partiels est p-automatique. La méthode utilisée ne permettait pas d'étudier l'exemple initial donné en caractéristique 2 par BAUM et SWEET. Nous allons montrer que, pour cet exemple, la suite des quotients partiels n'est pas q-automatique (pour tout entier $q \geq 2$), mais qu'elle est substitutive.

2. Substitutions

(Voir [EIL], [QUE] et [MAU].)

Soit Σ un alphabet fini contenant deux lettres au moins. Les éléments de Σ^i sont appelés *mots de longueur i* ($i \geq 1$). On convient que Σ^0 est l'ensemble dont le seul élément est le mot vide et on pose

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$$

l'ensemble des mots finis sur Σ, et $M(\Sigma)$ l'ensemble des mots finis et infinis sur Σ. Si $m \in \Sigma^*$, on note $|m|$ la longueur du mot m.

DÉFINITION 1. — Soit σ une application de Σ dans Σ^*. Par concaténation, σ se prolonge en une application de $M(\Sigma)$ dans lui-même en posant :

$$\text{pour tout } (m', m'') \in \Sigma^{*2}, \quad \sigma(m'm'') = \sigma(m')\sigma(m'')$$

et, pour tout $m \in \Sigma^{\mathbb{N}}$,

$$\sigma(m) = \sigma(m_0)\sigma(m_1)\cdots\sigma(m_n)\cdots \quad \text{si } m = m_0\cdots m_n\cdots.$$

L'application σ ainsi obtenue est appelée *substitution* sur l'alphabet Σ. Si de plus, $|\sigma(a)| = q$ pour tout $a \in \Sigma$, alors l'application σ est appelée une *q-substitution.*

Soit $\ell \in \Sigma$ telle que $\sigma(\ell) \in \ell\Sigma^*$. On munit $M(\Sigma)$ de la métrique naturelle ρ :

$$\rho(m_0m_1m_2\cdots; m'_0m'_1m'_2\cdots) = \frac{1}{\inf\{n \geq 1 \mid m_{n-1} \neq m'_{n-1}\}}.$$

En désignant par σ^n la n-ème itérée de σ, on voit que la suite $(\sigma^n(x))$ converge vers un élément $s \in \ell\Sigma^{\mathbb{N}}$ qui est point fixe de la substitution σ :

$$\sigma(s) = s.$$

DÉFINITION 2. — Soient σ une substitution sur l'alphabet fini Σ, Ξ un alphabet fini et τ une application de Σ vers Ξ. On dit que le mot infini $t \in \Xi^{\mathbb{N}}$ est *engendré* par une substitution s'il existe $s \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ tel que $\sigma(s) = s$ et $\tau(s) = t$. Si σ est une q-substitution, on dit que t est *engendré par une q-substitution* (ou un *q-automate*).

3. Énoncé du résultat

Il est démontré dans [B-S1] que l'équation

$$Xf^3 + f + X = 0$$

admet une solution unique f dans $\mathbb{F}_2((X^{-1}))$ admettant des quotients partiels appartenant à $\{1, X, X+1, X^2, X^2+1\}$ et donc bornés. Par ailleurs, il est démontré dans [M-R] que le développement en fraction continue de f est donné par

$$f = [1, X, \Gamma_\infty],$$

où Γ_∞ est la suite définie comme suit. Notons T l'ensemble de polynômes sur $\mathbb{F}_2$ défini par :

$$T = \{X, X+1, X^2, X^2+1\}.$$

Si $\Omega = (w_j)_{1\leq j\leq m} \in T^m$ est une suite de quotients partiels, nous notons :

$$\begin{aligned}
\overleftarrow{\Omega} &= w_m w_{m-1} \cdots w_2 w_1,\\
\tau(\Omega) &= (w_1+1)w_2\cdots w_m,\\
\Omega^{(n)} &= \underbrace{\Omega\,\Omega\cdots\Omega}_{n \text{ fois}}, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

- Pour n impair, $n \geq 3$ notons Λ_n la suite palindromique :

$$\Lambda_n = X, X+1, X^2, (X, X^2)^{((2^{n-1}-4)/3)}, X+1, X.$$

- Pour n pair, $n \geq 4$, notons Λ_n la suite palindromique :

$$\Lambda_n = X+1, X^2+1, (X, X^2)^{((2^{n-1}-5)/3)}, X, X^2+1, X+1.$$

Soit

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= X+1,\\
\Gamma_1 &= \Gamma_0, X^2+1,\\
\Gamma_2 &= \Gamma_1, X, X^2, X+1,\\
\Gamma_n &= \Gamma_{n-1}, \tau(\overleftarrow{\Gamma_{n-3}}), \Lambda_n, \Gamma_{n-3} \quad \text{pour} \quad n \geq 3.
\end{aligned}$$

Comme Γ_n commence par Γ_{n-1} alors Γ_n admet une limite, notée Γ_∞.

Nous nous proposons de démontrer les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. — *La suite X, Γ_∞ est substitutive*

THÉORÈME 2. — *La suite X, Γ_∞ n'est pas 2-automatique.*

THÉORÈME 3. — *La suite X, Γ_∞ n'est pas q-automatique pour aucun nombre $q \geq 2$.*

4. Démonstration du théorème 1

Soient

$$H = \{e, a_i, b_j, c_k, d_\ell\,;\ 0 \leq i \leq 5,\ 0 \leq k \leq 2,\ 0 \leq j \leq 5,\ 0 \leq \ell \leq 3\}$$

et H^* l'ensemble des mots finis formés par des éléments de H. Soit P la projection $P : H \to T$ définie par :

$$P(e) = P(a_i) = X, \quad P(b_j) = X+1, \quad P(c_k) = X^2, \quad P(d_\ell) = X^2+1.$$

Soit α la substitution sur H et soit π la permutation de H définies respectivement par :

$$\alpha : \begin{cases}
e \mapsto eb_0 & b_0 \mapsto d_0 & c_0 \mapsto a_5c_0a_5 & d_0 \mapsto a_0c_1b_4\\
a_0 \mapsto a_2a_1 & b_1 \mapsto d_1 & c_1 \mapsto b_2c_0b_1 & d_1 \mapsto a_5c_0b_1\\
a_1 \mapsto b_3b_5 & b_2 \mapsto d_2 & c_2 \mapsto a_0c_1a_3 & d_2 \mapsto b_2c_0a_5\\
a_2 \mapsto c_2 & b_3 \mapsto d_3 & & d_3 \mapsto b_5c_1a_3,\\
a_3 \mapsto a_4a_2 & b_4 \mapsto a_4b_0 & & \\
a_4 \mapsto b_4b_0 & b_5 \mapsto b_3a_1 & & \\
a_5 \mapsto c_0 & & &
\end{cases}$$