BULLETIN DE LA S. M. F.

NICOLAS BURQ
JEAN-MARC SCHLENKER

# Contrôle de l'équation des ondes dans des ouverts comportant des coins

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 126, n° 4 (1998), p. 601-637
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1998__126_4_601_0>

*Bull. Soc. math. France,*
126, 1998, p. 601–637.

# CONTRÔLE DE L'ÉQUATION DES ONDES DANS DES OUVERTS COMPORTANT DES COINS

PAR NICOLAS BURQ (*)

AVEC UNE ANNEXE EN COLLABORATION AVEC

Jean-Marc SCHLENKER (**)

RÉSUMÉ. — On étudie l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet dans un ouvert borné à coins (inclus dans $\mathbb{R}^2$). On démontre que la condition de contrôle géométrique introduite par C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch est une condition suffisante pour la contrôlabilité exacte au bord de ce système.

ABSTRACT. — EXACT CONTROLABILITY FOR THE WAVE EQUATION IN CORNER DOMAINS. — We study the wave equation with Dirichlet boundary conditions in a bounded corner domain (included in $\mathbb{R}^2$). We prove that the condition of geometrical control introduced by C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch is a sufficient condition for the exact boundary controlability of this equation.

TABLE DES MATIÈRES



(*) Texte reçu le 20 mars 1998, accepté le 2 septembre 1998.

N. BURQ, Centre de Mathématiques, UMR 7640 du CNRS, École Polytechnique, 91128 Palaiseau CEDEX.
Adresse actuelle : Université de Paris-Sud, Mathématiques, Bât. 425, URA 760 du CNRS, 91405 Orsay. Email : Nicolas.Burq@math.u-psud.fr.

(**) J.-M. SCHLENKER, Université de Paris Sud, Mathématiques, Bât. 425, URA 1169 du CNRS, 91405 Orsay. Email : Jean-Marc.Schlenker@math.u-psud.fr.

Classification AMS : 35 L 05, 73 D 25, 93 D 05.

Mots clés : équation des ondes, contrôle, ouvert à coins.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1998/601/\$ 5.00

## 1. Introduction

On se propose dans cet article de donner des conditions suffisantes pour la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans des ouverts de $\mathbb{R}^2$ comportant des coins, généralisant à ce cadre les conditions de contrôle géométrique de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [BLR92]. Le problème étudié est le suivant : on considère un ouvert borné $\Omega$ de $\mathbb{R}^2$, comportant des coins, $\Gamma$ un ouvert du bord $\partial\Omega$ de $\Omega$, et $T>0$ un réel. Pour $g \in L^2(]0,T[\times\Gamma)$, $(u_0,u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, le système

$$
(1.1) \qquad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_t, \\ u_{|\partial\Omega} = g \times 1_{\Gamma\times]0,T[}, \\ u_{|t=0} = u_0, \quad \partial_t u_{|t=0} = u_1, \end{cases}
$$

possède une solution unique dans

$$
C^0\big(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega)\big) \cap C^1\big(\mathbb{R}_t; H^{-1}(\Omega)\big).
$$

La question de la contrôlabilité exacte est de savoir si $\Gamma$ et $T$ étant donnés, pour tout $(u_0,u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, il existe $g \in L^2(]0,T[\times\Gamma)$ tel que la solution du système (1.1) vérifie $u_{|t\geq T} \equiv 0$.

Ce problème été étudié dans le cas où $\Omega$ est, au voisinage des coins, à frontière polyèdrale par P. Grisvard [Gr89] qui donne une réponse affirmative dans le cas où $\Gamma = \{y \in \mathbb{R}^2; (y-y_0)\cdot n(y) > 0\}$, où $y_0$ est un point de $\mathbb{R}^2$, $n(y)$ désigne la normale extérieure au bord de l'ouvert $\Omega$ et $T$ est assez grand. L'idée de la démonstration de P. Grisvard est de montrer que dans ce cas, l'ouvert est suffisament régulier pour que les intégrations par parties qui apparaissent quand on applique les méthodes de multiplicateurs puissent être menées à bien.

Les hypothèses que nous ferons sur la régularité de l'ouvert $\Omega$ sont les suivantes :

• En dehors des coins, l'ouvert $\Omega$ est de classe $C^\infty$ (en utilisant les résultats de [Bur97a] et de [Leb96], on pourrait remplacer cette hypothèse par $C^3$).

• L'ouvert $\Omega$ ne comporte que des coins extérieurs et est au voisinage de ces points analytique par morceaux, c'est-à-dire que pour chaque coin $O$, il existe deux fonctions $a$ et $b$, analytiques, définies au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, vérifiant $b'(0) < 0 < a'(0)$ et telles qu'au voisinage de $O$, il existe un système de cooordonnées orthonormales, $(y_1,y_2)$ avec $O=(0,0)$ et, dans ce système, on a (voir figure 1) :

$$
(1.2) \qquad \Omega^c = \big\{(y_1,y_2)\,;\ y_1 \geq 0 \text{ et } b(y_1) \leq y_2 \leq a(y_1)\big\}.
$$

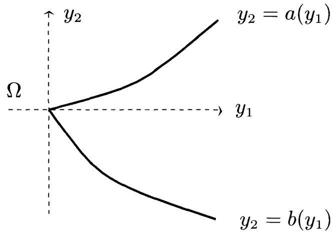


*Figure* 1. *Géométrie au voisinage du coin.*

• Le bord de l'ouvert $\Omega$ n'a pas de contact d'ordre infini avec ses tangentes (autrement dit, la courbure du bord de $\Omega$ ne s'annule pas à l'ordre infini).

Pour énoncer les hypothèses que nous ferons sur la géométrie du couple $(\Gamma, T)$, nous introduisons la notion de rayon bicaractéristique généralisé. On note :

• $M = \Omega \times \mathbb{R}_t$,

• $K$ l'ensemble des coins,

• $L = K \times \mathbb{R}_t$,

• $T_b^*M = T^*M \cup T^*(\partial M \setminus L) \cup T^*L$ le fibré cotangent jusqu'au bord à $M$.

On a une projection naturelle

$$\pi : T^*\mathbb{R}^{2+1}{}_{|\overline{M}} \longrightarrow T_b^*M$$

et on munit $T_b^*M$ de la topologie induite. On note $\Sigma_b$ la projection sur $T_b^*M$ de la variété caractéristique $\mathcal{C}$ de l'équation des ondes (d'équation $\tau^2 = |\xi|^2$), et $P_y : T_b^*M \to \overline{\Omega}$ la projection naturelle.

Définition 1.1. — On appelle *bicaractéristique généralisée* dans $\Omega$, toute application continue $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma_b$ telle que, si $P_y\gamma(s_0) \notin K$, $\gamma$ est, au voisinage de $s_0$, une bicaractéristique généralisée $C^\infty$ au sens usuel (voir [Hör85, chap. 17]) et si $P_y\gamma(s_0) \in K$, alors $\gamma(s_0 \pm 0)$ existent et $\gamma(s_0 + 0)$ est l'une des deux directions obtenues soit par réflexion de $\gamma(s_0 - 0)$ sur une des deux demi-faces de $\partial M$, soit par transmission directe (c'est-à-dire $\gamma(s_0 + 0) = \gamma(s - 0)$). On appellera *rayons* les projections spatiales des bicaractéristiques généralisées et nous les supposerons paramétrés à vitesse 1 (voir figure 2).

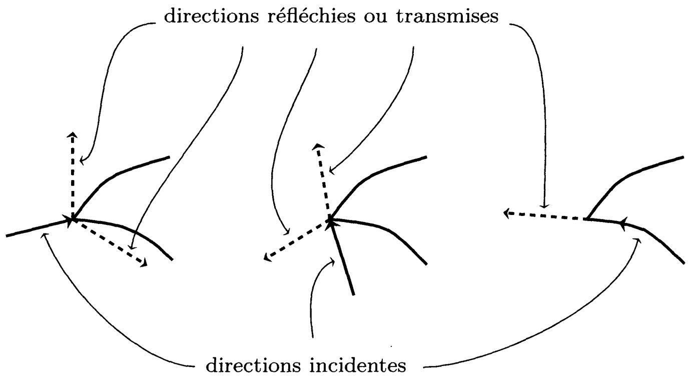


*Figure 2. Les rayons au voisinage du coin.*

DÉFINITION 1.2. — On dit que $\rho_0 \in T^*(\partial M \setminus L)$ est *non diffractif* si la bicaractéristique de l'équation des ondes dans $T^*\mathbb{R}^{2+1}$ issue d'un point de $\pi^{-1}(\rho_0) \cap \mathcal{C}$ ne reste pas incluse dans $T^*\mathbb{R}^{2+1}{}_{|\overline{\Omega}}$ au voisinage de $\rho_0$ (cette définition ne dépend pas du choix parmis les (au plus) deux points de l'ensemble $\pi^{-1}(\rho_0) \cap \mathcal{C}$)

DÉFINITION 1.3. — Soient $\Gamma \subset \partial\Omega \setminus K$ et $T > 0$. On dira que $(\Gamma, T)$ *contrôle géométriquement* l'ouvert $\Omega$ si toute bicaractéristique généralisée rencontre $T^*(\Gamma \times ]0, T[)$ en un point non diffractif (on dira qu'une telle bicaractéristique *a été contrôlée*) et si toutes les demi-bicaractéristiques tangentes aux arêtes des coins sont contrôlées avant de rencontrer à nouveau un coin.

DÉFINITION 1.4. — On dira que le couple $(\Omega, \Gamma)$ est *non focalisant* sur les coins si pour tout $O \in K$, l'ensemble des directions $\xi, |\xi| = 1$, pour lesquelles le rayon issu de $O$ dans la direction $\xi$ ne rencontre pas de coin avant de rencontrer $\Gamma$ en un point non diffratif est dense dans la sphère unité $\mathbb{S}^1$.

Si $(\Gamma, T_0)$ contrôle géométriquement l'ouvert $\Omega$, on notera pour tout demi-rayon $\gamma$ issu d'un coin à l'instant $t = 0$,

- $t_\gamma = \inf\{t > 0\,; \gamma(t) \in T^*\Gamma \text{ et } \gamma(t) \text{ est non diffractif}\} < T_0\,;$
- $T_1 = 2\sup_\gamma(t_\gamma) < 2T_0$.

On notera :

- $S$ l'ensemble des segments de rayons connectant un coin à un autre (éventuellement confondu) et ne rencontrant pas, entre ces deux coins $\Gamma$ en un point non diffractif;