

# Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

## LA CONJECTURE LOCALE DE GROSS-PRASAD POUR LES REPRÉSENTATIONS TEMPÉRÉES DES GROUPES UNITAIRES

Numéro 149

Nouvelle série

2 0 1 6

Raphaël BEUZART-PLESSIS

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

---

### ***Comité de rédaction***

|                     |                   |
|---------------------|-------------------|
| Valérie BERTHÉ      | Raphaël KRIKORIAN |
| Gérard BESSON       | O' Grady KIERAN   |
| Emmanuel BREUILLARD | Julien MARCHÉ     |
| Yann BUGEAUD        | Emmanuel RUSS     |
| Jean-François DAT   | Christophe SABOT  |
| Charles FAVRE       | Wilhelm SCHLAG    |

Pascal HUBERT (dir.)

### ***Diffusion***

|                                                              |                                              |
|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| Maison de la SMF                                             | AMS                                          |
| B.P. 67                                                      | P.O. Box 6248                                |
| 13274 Marseille Cedex 9                                      | Providence RI 02940                          |
| France                                                       | USA                                          |
| <a href="mailto:smf@smf.univ-mrs.fr">smf@smf.univ-mrs.fr</a> | <a href="http://www.ams.org">www.ams.org</a> |

### ***Tarifs 2016***

*Vente au numéro* : 45 € (\$67)

*Abonnement* Europe : 138 €, hors Europe : 154 € (\$231)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

### ***Secrétariat : Nathalie Christiaën***

Mémoires de la SMF  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96  
[revues@smf.ens.fr](mailto:revues@smf.ens.fr) • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2016

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-2-85629-841-1

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

---

**LA CONJECTURE LOCALE DE  
GROSS-PRASAD POUR LES  
REPRÉSENTATIONS TEMPÉRÉES  
DES GROUPES UNITAIRES**

**Raphaël Beuzart-Plessis**

**Société Mathématique de France 2016**

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

*R. Beuzart-Plessis*

Université d'Aix-Marseille, I2M-CNRS, Campus de Luminy,  
13288 Marseille CEDEX 9, France.

*E-mail* : rbeuzart@gmail.com

---

***Classification mathématique par sujets (2010).*** — 22E50, 11F85, 20G05.

***Mots clefs.*** — Conjecture locale de Gross-Prasad, groupes  $p$ -adiques, représentations tempérées.

---

# LA CONJECTURE LOCALE DE GROSS-PRASAD POUR LES REPRÉSENTATIONS TEMPÉRÉES DES GROUPES UNITAIRES

Raphaël Beuzart-Plessis

**Résumé.** — Soient  $E/F$  une extension quadratique de corps  $p$ -adiques et  $G = U(V)$ ,  $H = U(W)$  les groupes unitaires de deux espaces hermitiens  $V$  et  $W$  sur  $E$ . Supposons que  $V$  contienne  $W$  et que le complémentaire orthogonal de  $W$  dans  $V$  soit quasi-déployé (ce qui signifie que son groupe unitaire est quasi-déployé sur  $F$ ). Pour  $\pi$  et  $\sigma$  des représentations lisses irréductibles de  $G(F)$  et  $H(F)$ , les auteurs Gan, Gross et Prasad ont défini une multiplicité  $m(\pi, \sigma)$ . Dans le cas particulier où  $W$  est de codimension 1 dans  $V$ , cette multiplicité est simplement la dimension de l'espace d'entrelacements  $\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \sigma)$ . On énonce et prouve une formule intégrale pour cette multiplicité lorsque  $\pi$  et  $\sigma$  sont tempérées. On déduit alors de cette formule une version faible de la conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes unitaires. Cet article est la continuation directe d'un travail récent de Waldspurger concernant les groupes spéciaux orthogonaux.

**Abstract.** — Let  $E/F$  be a quadratic extension of  $p$ -adic fields and let  $G = U(V)$ ,  $H = U(W)$  be unitary groups of two hermitian spaces  $V$  and  $W$  over  $E$ . Assume that  $V$  contains  $W$  and that the orthogonal complement of  $W$  in  $V$  is an odd-dimensional quasisplit hermitian space (i.e. whose unitary group is quasisplit over  $F$ ). For  $\pi$  and  $\sigma$  smooth irreducible representations of respectively  $G(F)$  and  $H(F)$ , Gan, Gross and Prasad have defined a multiplicity  $m(\pi, \sigma)$ . In the particular case where  $W$  is of codimension 1 in  $V$ , this multiplicity is just the dimension of the intertwining space  $\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \sigma)$ . When  $\pi$  and  $\sigma$  are tempered, we state and prove an integral formula for this multiplicity. We then deduce from this formula a weak version of the local Gross-Prasad conjecture for tempered representations of unitary groups. This article represents a straight continuation of recent work of Waldspurger dealing with special orthogonal groups.

# TABLE DES MATIÈRES

|                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Introduction</b>                                                                           | 1  |
| <b>1. Groupes, mesures, notations</b>                                                         | 9  |
| 1.1. Groupes                                                                                  | 9  |
| 1.2. Mesures                                                                                  | 12 |
| 1.3. Bons voisinages                                                                          | 14 |
| 1.4. Intégrales orbitales invariantes et pondérées, quasi-caractères                          | 14 |
| 1.5. Représentations, induites paraboliques, opérateurs d'entrelacements, caractères pondérés | 16 |
| 1.6. R-groupes                                                                                | 18 |
| 1.7. Formule de Plancherel-Harish-Chandra                                                     | 19 |
| 1.8. Fonctions cuspidales et très cuspidales, quasi-caractères associés                       | 21 |
| <b>2. Majorations unipotentes</b>                                                             | 23 |
| 2.1. Une première majoration                                                                  | 23 |
| 2.2. Intégrales à paramètres                                                                  | 24 |
| 2.3. Fonctionnelles de Jacquet                                                                | 25 |
| 2.4. Majorations de mesures                                                                   | 30 |
| <b>3. Les groupes unitaires</b>                                                               | 33 |
| 3.1. Généralités                                                                              | 33 |
| 3.2. Sous-groupes compacts spéciaux, paraboliques, Levi et R-groupes                          | 35 |
| 3.3. Orbites nilpotentes régulières                                                           | 36 |
| <b>4. Position du problème</b>                                                                | 39 |
| <b>5. Le développement géométrique : définitions et énoncé</b>                                | 43 |
| 5.1. Un ensemble de tores                                                                     | 43 |
| 5.2. Un critère de convergence                                                                | 44 |
| 5.3. Définition de $J_{\text{geom}}(\theta, f)$                                               | 48 |
| 5.4. Énoncé du développement géométrique                                                      | 52 |
| 5.5. Énoncé du théorème pour les algèbres de Lie                                              | 52 |

|                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>6. Descente à l'algèbre de Lie</b>                                   | 55  |
| 6.1. Localisation de $J_N(\theta, f)$                                   | 55  |
| 6.2. Localisation de $J_{\text{geom}}(\theta, f)$                       | 59  |
| <b>7. Utilisation de la transformée de Fourier</b>                      | 63  |
| 7.1. Étude des classes de conjugaison dans $\Xi + S + \Sigma$           | 64  |
| 7.2. Un calcul de jacobien                                              | 70  |
| 7.3. Choix de sections localement analytiques                           | 73  |
| 7.4. Calcul de $J_{\kappa''}(\theta'', \varphi)$                        | 77  |
| <b>8. Calcul de la limite de <math>J_{x,\omega,N}(\theta, f)</math></b> | 79  |
| 8.1. Première transformation de $J_{x,\omega,N}(\theta, f)$             | 79  |
| 8.2. Changement de la fonction de troncature                            | 82  |
| 8.3. Le résultat final                                                  | 89  |
| <b>9. Cas des supports nilpotents</b>                                   | 91  |
| 9.1. Calcul de la limite de $J_N(\theta, f)$                            | 91  |
| 9.2. Une première approximation                                         | 93  |
| 9.3. Calcul de germes de Shalika                                        | 95  |
| 9.4. Preuve de la proposition 9.0.1                                     | 95  |
| <b>10. Preuve des théorèmes 5.4.1 et 5.5.1</b>                          | 99  |
| 10.1. Preuve du théorème 5.5.1                                          | 100 |
| 10.2. Preuve du théorème 5.4.1                                          | 101 |
| <b>11. Décomposition de Cartan relative</b>                             | 103 |
| <b>12. Majorations d'intégrales, cas <math>R = 0</math></b>             | 113 |
| <b>13. Majorations d'intégrales, cas général</b>                        | 119 |
| <b>14. Entrelacements tempérés</b>                                      | 133 |
| 14.1. Un lemme sur les entrelacements                                   | 134 |
| 14.2. Entrelacements dans une famille d'induites                        | 135 |
| 14.3. Tout entrelacement est tempéré                                    | 144 |
| <b>15. Induction et multiplicités</b>                                   | 149 |
| 15.1. Induction de $\pi$ et multiplicité I                              | 150 |
| 15.2. Induction de $\sigma$ et multiplicité                             | 154 |
| 15.3. Induction de $\pi$ et multiplicité II                             | 155 |
| <b>16. Le développement spectral</b>                                    | 157 |
| 16.1. La formule                                                        | 157 |
| 16.2. Utilisation de la formule de Plancherel                           | 158 |
| 16.3. Changement de fonction de troncature                              | 161 |

|                                                                          |            |
|--------------------------------------------------------------------------|------------|
| 16.4. Utilisation des calculs spectraux d'Arthur .....                   | 163        |
| 16.5. Évaluation d'une limite .....                                      | 164        |
| 16.6. Preuve du théorème .....                                           | 165        |
| <b>17. Une formule pour la multiplicité .....</b>                        | <b>167</b> |
| 17.1. Le théorème .....                                                  | 167        |
| 17.2. Induction pour la multiplicité géométrique .....                   | 168        |
| 17.3. Pseudo-coefficients .....                                          | 173        |
| 17.4. Le cas du groupe linéaire .....                                    | 174        |
| 17.5. Le théorème 17.1.2 implique le théorème 17.1.1 .....               | 174        |
| 17.6. Preuve du théorème 17.1.2 .....                                    | 175        |
| <b>18. Une application à la conjecture de Gross-Prasad .....</b>         | <b>179</b> |
| 18.1. Propriétés des $L$ -paquets tempérés pour les groupes unitaires .. | 179        |
| 18.2. Un calcul de fonction $\widehat{f}$ .....                          | 181        |
| 18.3. Classes de conjugaison stable de tores .....                       | 181        |
| 18.4. Un résultat dans le sens de la conjecture de Gross-Prasad .....    | 185        |
| <b>Bibliographie .....</b>                                               | <b>189</b> |

