

Revue d'Histoire des Mathématiques



*Self-portraits with Évariste Galois
(and the shadow of Camille Jordan)*

Frédéric Brechenmacher

Tome 17 Fascicule 2

2 0 1 1

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

RÉDACTION

Rédacteur en chef :

Norbert Schappacher

Rédacteur en chef adjoint :

Philippe Nabonnand

Membres du Comité de rédaction :

Tom Archibald

Alain Bernard

Frédéric Brechenmacher

Marie-José Durand-Richard

Étienne Ghys

Hélène Gispert

Jens Høyrup

Agathe Keller

Laurent Mazliak

Karen Parshall

Jeanne Peiffer

Sophie Roux

Joël Sakarovitch

Dominique Tournès

COMITÉ DE LECTURE

Philippe Abgrall

June Barrow-Greene

Umberto Bottazzini

Jean Pierre Bourguignon

Aldo Brigaglia

Bernard Bru

Jean-Luc Chabert

François Charette

Karine Chemla

Pierre Crépel

François De Gandt

Moritz Epplé

Natalia Ermolaëva

Christian Gilain

Catherine Goldstein

Jeremy Gray

Tinne Hoff Kjeldsen

Jesper Lützen

Antoni Malet

Irène Passeron

Christine Proust

David Rowe

Ken Saito

S. R. Sarma

Erhard Scholz

Reinhard Siegmund-Schultze

Stephen Stigler

Bernard Vitrac

Directrice de la publication :

Aline Bonami

Secrétariat :

Nathalie Christiaën

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré

11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05

Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96

Mél : revues@smf.ens.fr / URL : <http://smf.emath.fr/>

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs : Prix public Europe : 67 €; prix public hors Europe : 76 €;
prix au numéro : 38 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
Hindustan Book Agency, O-131, The Shopping Mall, Arjun Marg, DLF
Phase 1, Gurgaon 122002, Haryana, Inde
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

SELF-PORTRAITS WITH ÉVARISTE GALOIS (AND THE SHADOW OF CAMILLE JORDAN)

FRÉDÉRIC BRECHENMACHER

ABSTRACT. — This paper investigates the collections of 19th century texts in which Evariste Galois's works were referred to in connection to those of Camille Jordan. Before the 1890s, when object-oriented disciplines developed, most of the papers referring to Galois have underlying them three main *networks of texts*. These groups of texts were revolving around the works of individuals: Kronecker, Klein, and Dickson. Even though they were mainly active for short periods of no more than a decade, the three networks were based in turn on specific references to the works of Galois that occurred in the course of the

Texte reçu le 15 février 2011, accepté le 15 mars 2011.

F. BRECHENMACHER, Univ. Lille Nord de France, 59000 Lille (France), U. Artois, Laboratoire de mathématiques de Lens (EA 2462), rue Jean Souvraz S.P. 18, 62300 Lens (France).

Courrier électronique : frederic.brechenmacher@euler.univ-artois.fr

2000 Mathematics Subject Classification : 01A55, 01A85.

Key words and phrases : Galois, Jordan, Hermite, Kronecker, Klein, Dickson, Moore, *Traité des substitutions*, networks of texts, history of algebra, history of number theory, linear groups, cyclotomy, substitutions, group theory, equations, finite fields, Galois fields.

Mots clefs. — Galois, Jordan, Hermite, Kronecker, Klein, Dickson, Moore, *Traité des substitutions*, réseaux de textes, histoire de l'algèbre, histoire de la théorie des nombres, groupes linéaires, cyclotomie, substitutions, théorie des groupes, equations, corps finis.

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche: ANR CaaFÉ (ANR-10-JCJC 0101).

I am grateful to the *Projet histoire des sciences mathématiques* of the Institut de mathématiques de Jussieu for hosting a sabbatical visit during which this paper has been written. Special thanks to Catherine Goldstein and Norbert Schappacher for their helpful advice and comments as well as to Tom Archibald for his help with the English. I also thank the two anonymous reviewers for having commented on a preliminary version of this paper.

19th century. By questioning how mathematicians were portraying themselves and their mathematics through their references to Galois, this paper therefore sheds new light on some collective interpretations of Galois's works. It especially highlights the important role played in the long term legacy of Galois by some practices of *reduction* modeled on the *analytic representation* of the decomposition of linear substitutions into two forms of actions of cycles.

Complementary to the local study of these networks, the article proposes a more global analysis. Galois's works were often related to the problem of the "classification and transformation" of the "irrationals." Contrary to what has become, in the 20th century, a commonplace of the historiography of algebra, and distinct from the teaching of courses in *Algèbre supérieure*, Galois's works were fitted into classifications of mathematical knowledge neither under the heading of the theory of equations nor as part of the theory of substitutions. For most of the 19th century, the problem of the irrationals involved elliptic (or abelian) functions (and therefore complex analysis). The impossibility of solving *general* algebraic equations of degree greater than four by radicals highlighted the necessity of characterizing the *special* nature of the irrational quantities and functions defined by both algebraic and differential equations.

RÉSUMÉ (Auto-portraits avec Évariste Galois (et l'ombre de Camille Jordan))

Cet article questionne les dimensions collectives des relations entre les travaux de Galois et Jordan au XIX^e siècle. Avant les années 1890 et le développement de disciplines centrées sur des objets, les références à Galois se répartissaient majoritairement au sein de trois *réseaux de textes* centrés sur des travaux d'individus : Klein, Kronecker et Dickson. Bien que ces réseaux n'aient été chacun essentiellement actif que sur le temps court d'une décennie, tous s'appuyaient sur des références spécifiques à Galois qui impliquaient le temps long du XIX^e siècle. En envisageant de telles références comme des autoportraits de mathématiciens et de leurs mathématiques, cet article porte un nouvel éclairage sur les travaux de Galois et leurs circulations. Il montre notamment l'importance du rôle joué sur le temps long par des pratiques de réductions prenant modèle sur la *représentation analytique* de la décomposition des substitutions linéaires en deux formes d'actions des cycles.

En complément de l'étude locale de ces trois réseaux, cet article propose également une analyse à un niveau plus global. Contrairement à ce qui était devenu au XX^e siècle un lieu commun de l'historiographie de l'algèbre, et à l'exception du domaine de l'enseignement de l'Algèbre supérieure, les travaux de Galois ont pendant longtemps été envisagés collectivement dans des cadres différents de ceux de la théorie des équations ou de la théorie des substitutions. A l'échelle d'un demi-siècle en Europe, ces travaux ont été effectivement largement commentés dans le cadre du problème de la « classification et la transformation » des « irrationnelles ». Pendant une large partie du XIX^e siècle, ce problème impliquait notamment les fonctions elliptiques et abéliennes—et par conséquent l'analyse complexe. L'impossibilité de résoudre par radicaux des équations algébriques *générales* de degré supérieur ou égal à cinq démontrait en effet la nécessité de caractériser la nature *spéciale* des grandeurs ou fonctions irrationnelles définies par des équations aussi bien algébriques que différentielles.

INTRODUCTION¹

Opening Camille Jordan's 1870 *Traité des substitutions et des équations algébriques*—which will simply be called the *Traité* in the sequel—one reads in the preface that Galois was first to have grounded the theory of equations on a “definitive base by showing that to each equation corresponds a group of substitutions in which its essential characteristics are reflected” [Jordan 1870, p. v]. But the *Traité* aimed at going beyond Galois: “... the solution of equations by radicals ... now appears just as the first link in a long chain of questions concerning the transformations of irrational numbers and their classification.” To achieve this, Jordan presented an “essential” “method of reduction” of a group into chains of (normal) subgroups [Jordan 1870, p. 392],² which transformed Galois's ideas into a fully fledged theory, a “*corps de doctrine*.”

The present paper, in a way, follows a similar method; it aims at investigating how the decomposition of a corpus of mathematical papers into networks of texts can unveil certain collective dimensions in the historical process of mathematics. More precisely, this paper aims at investigating the *collective* dimensions of the *relations* between the works of Évariste Galois and Camille Jordan.

Jordan's *Traité*, the starting point of this paper, has often been taken to be a midpoint in the historiography of Galois Theory. In a retrospective perspective, Jordan's Galois would mark a turning point in the unfolding of the abstract group concept [Wussing 1984], of Artin's Galois theory [Kiernan 1971], or more generally of the rise of a structural image of algebra [Corry 1996]. Recently, in the opposite historical direction, the *Traité*'s

¹ This paper will appeal to quotation marks quite often for the purpose of mentioning expressions or terminologies as they were used by the actors (and solely for this purpose).

In this paper, the term “substitution group” designates a permutation group on a finite number of letters, and “linear” substitutions/groups designate both linear and affine substitutions/groups. Moreover, p is a prime number, n is an integer, ξ is a primitive n th root of unity, and g is a primitive root mod p .

² An irreducible equation $f(x) = 0$ is solvable by radicals if and only if its Galois group can be “reduced” by a series $G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots \supset H_m = I$ in which every H_k is a normal subgroup of G and all H_k/H_{k+1} are abelian. This theorem is closely related to the Jordan-Hölder theorem, but the chain of subgroups here is not necessarily a composition series, with simple abelian quotients (and therefore cyclic of prime order). This criterion of solvability was first stated in [Jordan 1864], while the theorem on the invariance of the orders of the successive quotients in a composition series was stated in [Jordan 1869a] and proved in [Jordan 1870, p. 42–48].