

Revue d'Histoire des Mathématiques



*Irrationalité des nombres, irrationalité des lignes
selon Michael Stifel et Simon Stevin*

Sabine Rommevaux-Tani

Tome 20 Fascicule 1

2 0 1 4

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

RÉDACTION

Rédacteur en chef :

Norbert Schappacher

Rédacteur en chef adjoint :

Philippe Nabonnand

Membres du Comité de rédaction :

Alain Bernard
Frédéric Brechenmacher
Maarten Bullynck
Sébastien Gandon
Hélène Gispert
Catherine Goldstein
Jens Høyrup
Agathe Keller
Marc Moyon
Karen Parshall
Jeanne Peiffer
Tatiana Roque
Sophie Roux
Dominique Tournès

Directeur de la publication :

Marc Peigné

COMITÉ DE LECTURE

Philippe Abgrall
June Barrow-Greene
Umberto Bottazzini
Jean Pierre Bourguignon
Aldo Brigaglia
Bernard Bru
Jean-Luc Chabert
François Charette
Karine Chemla
Pierre Crépel
François De Gandt
Moritz Epple
Natalia Ermolaëva
Christian Gilain
Jeremy Gray
Tinne Hoff Kjeldsen
Jesper Lützen
Antoni Malet
Irène Passeron
Christine Proust
David Rowe
Ken Saito
S. R. Sarma
Erhard Scholz
Reinhard Siegmund-Schultze
Stephen Stigler
Bernard Vitrac

Secrétariat :

Nathalie Christiaën
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96
Mél : revues@smf.ens.fr / URL : <http://smf.emath.fr/>

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs : Prix public Europe : 80 €; prix public hors Europe : 89 €;
prix au numéro : 43 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
Hindustan Book Agency, O-131, The Shopping Mall, Arjun Marg, DLF
Phase 1, Gurgaon 122002, Haryana, Inde
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

IRRATIONALITÉ DES NOMBRES, IRRATIONALITÉ DES LIGNES SELON MICHAEL STIFEL ET SIMON STEVIN

SABINE ROMMEVAUX-TANI

RÉSUMÉ. — Nous examinons dans cet article les interprétations numériques de la classification des lignes irrationnelles présentée par Euclide au livre X des *Éléments*, que proposent les deux algébristes de la Renaissance, Michael Stifel et Simon Stevin. Nous comparons ces interprétations en soulignant les ressemblances et les différences et nous les replaçons dans le projet d'une arithmétique générale porté par les deux auteurs.

ABSTRACT (Irrationality of numbers, irrationality of lines according to Michael Stifel and Simon Stevin)

In this paper we study numerical interpretations of the classification of irrational lines presented by Euclid in Book X of the *Elements*, interpretations that were given by Michael Stifel and Simon Stevin, two algebraists of the Renaissance. We emphasise the similarities and the differences between their interpretations, and we place them in the context of a general arithmetical project proposed by the two authors.

Le rôle qu'ont pu jouer les algébristes dans l'étude des nombres radicaux et dans l'interprétation numérique du livre X des *Éléments* d'Euclide est relativement bien connu pour la tradition arabe [Ben Miled 1999 ; 2005 ; Farès 2009 ; Rashed 1984]. Il l'est beaucoup moins pour la tradition

Texte reçu le 23 août 2013, modifié le 27 avril 2014, accepté le 21 mai 2014.

S. ROMMEVAUX-TANI, CNRS, UMR 7219, laboratoire SPHERE.

Classification mathématique par sujets (2010) : 01A40.

Mots clefs : Stifel, Stevin, Euclide, irrationalité.

Key words and phrases. — Stifel, Stevin, Euclid, irrationality.

J'ai commencé cette étude à l'occasion d'un séjour à All Souls College (Oxford), de janvier à juin 2012. Je remercie les collègues du College pour les conditions exceptionnelles de travail qu'ils m'ont offertes.

latine de la Renaissance européenne. Nous nous proposons de combler en partie cette lacune, en présentant ici la traduction numérique que font deux éminents algébristes du XVI^e siècle, Michael Stifel et Simon Stevin, de la théorie euclidienne de l'irrationalité des lignes¹.

Le projet de ces deux auteurs doit être replacé dans l'économie de leurs ouvrages. La relecture du livre X des *Éléments* se trouve chez Stifel au livre II de son *Arithmetica integra* [Stifel 1544], qui est consacré aux nombres irrationnels². Après s'être interrogé sur le statut de ces nombres (nous y reviendrons plus loin), Stifel propose une classification des nombres irrationnels, généralisation de la classification euclidienne des lignes irrationnelles ; ces différents types de nombres irrationnels serviront ensuite à la traduction numérique du livre X des *Éléments*. Dans ce livre II, on trouve aussi l'exposé des différentes opérations sur les nombres irrationnels. Le livre I était consacré, quant à lui, aux opérations sur les nombres entiers et sur les fractions, aux progressions arithmétiques, géométriques et harmoniques, avec en appendice certaines règles classiques des arithmétiques pratiques. Le livre III s'ouvre sur la « règle d'algèbre », c'est-à-dire la mise en équation des problèmes par le choix d'une inconnue, et leur résolution ; il se poursuit par l'exposé des opérations sur les nombres cossiques (c'est-à-dire les puissances de l'inconnue) et la recherche des racines des équations du second degré. Ainsi, ces trois exposés, sur les nombres entiers et fractionnaires, sur les nombres irrationnels ou radicaux, sur les nombres cossiques, forment ce que Stifel nomme une « arithmétique entière ». Face à ceux qui contesteraient que les nombres irrationnels soient de vrais nombres, Stifel se doit de justifier leur étude dans le cadre d'une arithmétique, même qualifiée d'entière. Pour cela il souligne qu'ils sont utiles, voire indispensables, notamment en géométrie. Quoi de mieux, alors, que de montrer que les nombres irrationnels sont au fondement du livre X d'Euclide ?

Sous le titre d'*Arithmetique*³ [Stevin 1585a], Stevin présente lui aussi un exposé qui dépasse très largement le cadre de l'étude des nombres entiers.

¹ Cette étude, ainsi que mes traductions du texte de Stifel, doivent beaucoup aux discussions que j'ai pu avoir avec mes collègues et amis Odile Kouteynikoff, Marie-Hélène Labarthe, François Loget et Maryvonne Spiesser lors du séminaire sur l'algèbre à la Renaissance que j'ai organisé à Tours entre 2006 et 2011.

² Le titre de ce livre est le suivant « Liber secundus, de numeris irrationalibus » [Stifel 1544, f^o 103^r].

³ L'*Arithmetique* de Simon Stevin a été publiée une première fois à Leyde, chez Christophe Plantin, en 1585, suivie par *Les quatre premiers livres d'algebre de Diophante d'Alexandrie, traduits en langue Françoise & expliquez par Simon Stevin de Bruges* [Stevin 1585a]. On trouve relié dans le même volume et publié la même année chez le même éditeur, *La Pratique d'arithmetique*, suivie de *La regle d'interest avec ses tables*, de

Mais comme nous le verrons, pour Stevin, les nombres radicaux sont des nombres à part entière, au même titre que les entiers ou les fractions. L'ouvrage de Stevin se divise en deux parties, une première partie de définitions, une seconde partie de propositions. Comme chez Stifel, les opérations sur les nombres radicaux et leurs composés se trouvent présentées entre les opérations sur les nombres entiers et fractionnaires, dits nombres Arithmétiques, et les opérations sur les quantités algébriques, qui forment avec les radicaux et leurs composés, ce que Stevin nomme les nombres Géométriques. La structure de l'exposé vise à souligner le parallélisme que l'on peut établir entre ces différents types de nombres et les opérations que l'on peut définir sur eux. Et les nombres radicaux, même s'ils sont étudiés dans le cadre d'une arithmétique, renvoient bien évidemment à la géométrie et peuvent servir à la lecture du livre X des *Éléments*, comme Stevin le montre dans son « Traité des incommensurables grandeurs, avec une Appendice de l'explication du Dixiesme livre d'Euclide » [Stevin 1585b].

Ainsi, pour Stifel et Stevin, l'étude des nombres radicaux et l'application qu'on peut en faire pour une lecture du livre X des *Éléments* (qui chez Euclide est un livre de géométrie) trouvent naturellement leur place dans un projet global d'une « grande » arithmétique, dans laquelle ils insèrent l'algèbre, dont les méthodes permettent aussi bien de résoudre des problèmes d'arithmétique que de géométrie.

Stifel et Stevin ne sont pas les seuls algébristes du xvi^e siècle à proposer une relecture du livre X des *Éléments*. Il vaudrait aussi la peine d'étudier les présentations des nombres irrationnels et leur utilisation pour l'étude des lignes irrationnelles que font Niccolo Tartaglia au livre 11 de la deuxième partie de son *General trattato di numeri, et misura* (publié à Venise en 1556) ou Christoph Clavius dans son *Algebra* (publiée à Rome en 1608)⁴. Mais il nous a semblé qu'il était utile de comparer ici les exposés de Stifel et de Stevin, car, si l'un comme l'autre se proposent de rendre la lecture du livre X des *Éléments* d'Euclide plus aisée grâce aux nombres, si le point de départ de leur étude est le même (partir des racines carrées de nombres de la forme $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ou $\sqrt{a} + b$ pour retrouver les différents nombres irrationnels correspondant aux lignes irrationnelles euclidiennes), leurs démarches ne sont pas identiques, comme nous allons le montrer.

La disme et d'un *Traicté des incommensurables grandeurs, avec une Appendice de l'explication du Dixiesme livre d'Euclide* (la numérotation des pages recommence donc au début pour cette seconde partie) [Stevin 1585b]. Voir aussi la rédition, augmentée par Albert Girard [1625].

⁴ Je me propose d'en faire l'objet d'un prochain article.