

**LE THÉORÈME DE POSITIVITÉ,
LE THÉORÈME DE COMPARAISON
ET LE THÉORÈME D'EXISTENCE DE RIEMANN**

par

Zoghman Mebkhout

Résumé. — Dans ce cours on définit le complexe d'irrégularité d'un complexe holonome le long d'un espace analytique complexe. On montre que c'est un faisceau pour un module holonome et une hypersurface. On montre le critère fondamental de la régularité qui permettra d'établir la nullité du faisceau d'irrégularité. On montre que toutes les propriétés fonctorielles de la régularité sont des conséquences du critère fondamental. On montre le théorème d'existence du type de Riemann en construisant explicitement des réseaux canoniques à l'aide du théorème d'extension des faisceaux analytiques cohérents. On montre enfin le théorème d'existence du type de Frobenius concernant les complexes holonomes d'ordre infini.

Abstract (The Positivity Theorem, the Comparison Theorem and Riemann's Existence Theorem)

In this lecture we define the irregularity complex of an holonomic complex along a complex analytic space and we prove that it is a sheaf for an holonomic module and an hypersurface. We prove the fundamental regularity criterium giving the vanishing of the irregularity sheaf. We prove that all the functorial properties of the regularity are consequences of the fundamental criterium. We prove the existence theorem of Riemann type by building explicit lattices using the extension theorem for analytic coherent sheaves. We finally prove the existence theorem of Frobenius type for holonomic complexes of infinite order.

Classification mathématique par sujets (2000). — 12, 14, 32.

Mots clefs. — Positivité, faisceau d'irrégularité, critère fondamental de la régularité, théorème de comparaison, réseau canonique.

Table des matières

1. Introduction	170
Références bibliographiques citées dans l'introduction	183
2. Fondement de la Théorie des $\mathcal{D}_X$ -modules	185
2.1. Le faisceau des opérateurs différentiels	185
2.2. Cas d'une variété analytique complexe, cohérence, cycles caractéristiques, holonomie, dualité	186
2.3. Cas d'une variété algébrique non singulière	189
2.4. Cristaux de Grothendieck et $\mathcal{D}_X$ -modules	191
2.5. Les foncteurs de localisation et de cohomologie locale algébrique, suite de Mayer-Vietoris	195
2.6. Commutation de la cohomologie locale algébrique avec l'image inverse	197
2.7. Solutions formelles d'un $\mathcal{D}_X$ -module	198
3. Le Théorème de Positivité de l'Irrégularité	202
3.1. Introduction	202
3.2. La Catégorie des Coefficients Constructibles $D_c^b(\mathbb{C}_X)$, Constructibilité des complexes de de Rham et des solutions holomorphes d'un complexe holonome	203
3.3. Le Théorème de Dualité Locale	204
3.4. Le Complexe d'Irrégularité	206
3.5. Le Théorème de Positivité	208
3.6. Stabilité du Complexe d'Irrégularité par Images Directes Propres	221
4. Le Critère Fondamental de la Régularité	223
4.1. Introduction	223
4.2. La Catégorie des Complexes Holonomes Réguliers $D_{hr}^b(\mathcal{D}_X)$	224
4.3. Le Critère Fondamental de la Régularité	227
5. Le Théorème global de Comparaison pour la Cohomologie de de Rham	239
5.1. Le théorème global de comparaison pour la cohomologie de de Rham : cas des coefficients constants	239
5.2. Le théorème global de comparaison pour la cohomologie de de Rham : cas des coefficients lisses	242
6. Stabilité de la catégorie des complexes holonomes réguliers par Image inverse, Produits tensoriels interne et externe	243
6.1. Image inverse	243
6.2. Produits tensoriels externe et interne	246
7. Stabilité de la Catégorie des complexes holonomes réguliers par Dualité	251
7.1. Stabilité par dualité	252
7.2. Image inverse extraordinaire	255
7.3. Pleine fidélité du foncteur de de Rham	255

8. Résumé	257
8.1. Résultats de Finitude	257
8.2. Résultats de Positivité	257
8.3. Résultats de Régularité	258
9. La catégorie des complexes holonomes réguliers : cas algébrique	259
10. Le Théorème d'Existence de type de Riemann	263
10.1. Introduction	263
10.2. Le Théorème de prolongement des faisceaux analytiques cohérents	266
10.3. Le théorème d'existence de type de Riemann pour les modules lisses à connexion	271
10.4. Holonomie et régularité des images directes locales par une fonction d'un module holonome régulier	276
10.5. Le théorème d'existence de type de Riemann pour les coefficients analytiquement constructibles	278
Passage du local au global, première étape : recollement des objets	282
Passage du local au global, deuxième étape : recollement des morphismes	283
10.6. Le théorème d'existence de type de Riemann pour les coefficients algébriquement constructibles	286
11. Le Théorème d'Existence de type de Frobenius pour les coefficients holonomes d'ordre infini	288
11.1. Introduction	288
11.2. Le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre infini	288
11.3. Fidèle platitude de l'extension $\mathcal{D}_X \rightarrow \mathcal{D}_X^\infty$	290
11.4. Théorème de bidualité pour les $\mathcal{D}_X^\infty$ -modules	291
11.5. Équivalence de catégories entre la catégorie des complexes holonomes d'ordre infini et la catégorie des complexes constructible.	298
11.6. Le module d'Irrégularité	301
Références	305
Liste des notations	306
Index	308

$$\begin{array}{ccc} F & X & \xleftarrow{h} & X' \\ \downarrow f & & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{g} & Y' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} U \subset X \rightarrow Y \\ \downarrow \\ \text{...} \end{array}$$

$$\begin{cases} Lg^* Rf_! (F) \simeq Rf_! Lh^* (F) \\ Rf_* Rg_* \simeq Rh_* Rj_! \end{cases}$$

$$Lg^* Rf_! (F) \xleftrightarrow{\quad} Rf_! Lh^* (F) \quad \text{is } i^* \circ j^* \text{ isom}$$

$$Lf^*(F) \xleftarrow{\quad} Lf^*(\mathbb{1}) \otimes Lf^*(F) \quad \text{is } i^* \circ j^* \text{ isom}$$

$$\begin{array}{ccc} F & X & \xrightarrow{q'} & Y \\ \downarrow f & \searrow & & \downarrow f' \\ S & \xleftarrow{g} & Y' & \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} F \otimes G \simeq Lg^*(F) \otimes Lf^*(G) \\ Rh_*(F \otimes G) \simeq Rf_*(F) \otimes Rg_*(G) \end{array}} \quad \text{Kawada}$$

Notes de Alexandre Grothendieck d'un mini cours donné à Mormoiron dans le Vaucluse (France) en mai 1983 donnant un formulaire des six opérations cohomologiques et de leurs compatibilités.