

466

ASTÉRISQUE

2026

**GEOMETRIZATION OF
THE LOCAL LANGLANDS
CORRESPONDENCE**

Laurent FARGUES & Peter SCHOLZE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France

Numéro 466, 2026

Comité de rédaction

Thierry BODINEAU

Eleonora DI NEZZA

Cécile HUNEAU

Alessandra IOZZI

Rémi RHODES

Sug Woo SHIN

Antoine CHAMBERT-LOIR (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF

B.P. 67

13274 Marseille Cedex 9

France

basile.nagel@smf.emath.fr

AMS

P.O. Box 6248

Providence RI 02940

USA

www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 99€ (\$149)

Abonnement : Europe : 665€; hors Europe : 718€ (\$1 077)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Fax : (33) 01 40 46 90 96

asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2026

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN : 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN : 978-2-37905-230-9

doi : 10.24033/ast.1270

Directrice de la publication : Isabelle Gallagher

466

ASTÉRISQUE

2026

**GEOMETRIZATION OF
THE LOCAL LANGLANDS
CORRESPONDENCE**

Laurent FARGUES & Peter SCHOLZE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Laurent Fargues
Institut de Mathématiques de Jussieu
4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05
laurent.fargues@imj-prg.fr

Peter Scholze
Max Planck Institute for Mathematics
Vivatsgasse 7, 53111 Bonn
scholze@mpim-bonn.mpg.de

Geometrization of the local Langlands correspondence	1
<i>by</i> Laurent FARGUES and Peter SCHOLZE	
Étale cohomology of diamonds	439
<i>by</i> Peter SCHOLZE	

Texte soumis le 6 juin 2021, révisé le 16 octobre 2024, accepté le 26 novembre 2024.

Mathematical Subject Classification. — 11S37, 14D24, 14G22, 11F85, 11S31.

Keywords. Local Langlands program, p -adic Hodge theory, geometric Langlands program.

Mots-clefs. Programme de Langlands local, théorie de Hodge p -adique, programme de Langlands géométrique.

GEOMETRIZATION OF THE LOCAL LANGLANDS CORRESPONDENCE

by Laurent FARGUES and Peter SCHOLZE

Abstract. — Following the idea of [Far16], we develop the foundations of the geometric Langlands program on the Fargues–Fontaine curve. In particular, we define a category of ℓ -adic sheaves on the stack Bun_G of G -bundles on the Fargues–Fontaine curve, prove a geometric Satake equivalence over the Fargues–Fontaine curve, and study the stack of L -parameters. As applications, we prove finiteness results for the cohomology of local Shimura varieties and general moduli spaces of local shtukas, and define L -parameters associated with irreducible smooth representations of $G(E)$, a map from the spectral Bernstein center to the Bernstein center, and the spectral action of the category of perfect complexes on the stack of L -parameters on the category of ℓ -adic sheaves on Bun_G .

Résumé. (Géométrisation de la correspondance de Langlands locale) — Suivant les idées de [Far16], nous développons les fondations du programme de Langlands géométrique sur la courbe de Fargues–Fontaine. En particulier, nous définissons une catégorie de faisceaux ℓ -adiques sur le champ Bun_G des G -fibrés sur la courbe de Fargues–Fontaine, nous démontrons une équivalence de Satake géométrique sur la courbe de Fargues–Fontaine et nous étudions le champ des L -paramètres. Comme application, nous prouvons des résultats de finitude de la cohomologie des variétés de Shimura locales et d’espaces de modules généraux de Shtukas locaux, nous construisons des L -paramètres associés aux représentations lisses irréductibles de $G(E)$, une application du centre de Bernstein spectral vers le centre de Bernstein, ainsi qu’une action spectrale de la catégorie des complexes parfaits sur le champ des L -paramètres sur la catégorie des faisceaux ℓ -adiques sur Bun_G .

CONTENTS

I	Introduction	1
I.1	The local Langlands correspondence	1
I.2	The big picture	2
I.3	The Fargues–Fontaine curve	14
I.4	The geometry of Bun_G	17
I.5	ℓ -adic sheaves on Bun_G	21
I.6	The geometric Satake equivalence	24
I.7	Cohomology of moduli spaces of shtuka	29
I.8	The stack of L -parameters	32
I.9	Construction of L -parameters	34
I.10	The spectral action	37
I.11	The origin of the ideas	40
I.12	Acknowledgments	45
I.13	Notation	46
II	The Fargues–Fontaine curve and vector bundles	49
II.1	The Fargues–Fontaine curve	52
II.2	Vector bundles on the Fargues–Fontaine curve	63
II.3	Further results on Banach–Colmez spaces	86
III	Bun_G	99
III.1	Generalities	100
III.2	The topological space $ \mathrm{Bun}_G $	101
III.3	Beauville–Laszlo uniformization	111
III.4	The semistable locus	115
III.5	Non-semistable points	119

IV	Geometry of diamonds	125
IV.1	Artin stacks	125
IV.2	Universally locally acyclic sheaves	134
IV.3	Formal smoothness	154
IV.4	A Jacobian criterion	158
IV.5	Partial compactly supported cohomology	180
IV.6	Hyperbolic localization	185
IV.7	Drinfeld's lemma	195
V	$D_{\text{ét}}(\text{Bun}_G)$	201
V.1	Classifying stacks	202
V.2	Étale sheaves on strata	206
V.3	Local charts	208
V.4	Compact generation	214
V.5	Bernstein–Zelevinsky duality	217
V.6	Verdier duality	219
V.7	ULA sheaves	221
VI	Geometric Satake	225
VI.1	The Beilinson–Drinfeld Grassmannian	229
VI.2	Schubert varieties	236
VI.3	Semi-infinite orbits	242
VI.4	Equivariant sheaves	249
VI.5	Affine flag variety	251
VI.6	ULA sheaves	254
VI.7	Perverse Sheaves	259
VI.8	Convolution	270
VI.9	Fusion	273
VI.10	Tannakian reconstruction	278
VI.11	Identification of the dual group	283
VI.12	Chevalley involution	289

VII	$D_{\blacksquare}(X)$	293
VII.1	Solid sheaves	295
VII.2	Four functors	305
VII.3	Relative homology	311
VII.4	Relation to $D_{\text{ét}}$	316
VII.5	Dualizability	319
VII.6	Lisse-étale sheaves	324
VII.7	$D_{\text{lis}}(\text{Bun}_G)$	328
VIII	L-parameter	335
VIII.1	The stack of L -parameters	336
VIII.2	The singularities of the moduli space	340
VIII.3	The coarse moduli space	345
VIII.4	Excursion operators	351
VIII.5	Modular representation theory	354
IX	The Hecke action	383
IX.1	Condensed ∞ -categories	386
IX.2	Hecke operators	388
IX.3	Cohomology of local Shimura varieties	391
IX.4	L -parameter	395
IX.5	The Bernstein center	395
IX.6	Properties of the correspondence	398
IX.7	Applications to representations of $G(E)$	403
X	The spectral action	411
X.1	Rational coefficients	413
X.2	Elliptic parameters	419
X.3	Integral coefficients	422
	Bibliography	427

