

ASTÉRISQUE 298

FORMES AUTOMORPHES (I)

ACTES DU SEMESTRE DU CENTRE ÉMILE BOREL,
PRINTEMPS 2000

édité par

Jacques Tilouine

Henri Carayol

Michael Harris

Marie-France Vignéras

Société Mathématique de France 2005

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

J. Tilouine

LAGA, CNRS, UMR 7539, Institut Galilée, Université Paris 13,
93430 Villetaneuse, France.

E-mail : `tilouine@math.univ-paris13.fr`

H. Carayol

IRMA, Université Louis Pasteur, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex,
France.

E-mail : `carayol@math.u-strasbg.fr`

M. Harris

Université Paris VII, Institut de Mathématiques de Jussieu, 2, place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05 France.

E-mail : `harris@math.jussieu.fr`

M.-F. Vignéras

Université Paris VII, Institut de Mathématiques de Jussieu, 2, place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05, France.

E-mail : `vigneras@math.jussieu.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11-04, 11F03, 11F11, 11F30, 11F33, 11F41, 11F60, 11F70, 11F72, 11F75, 11G15, 11G18, 11G40, 11R39, 11S37, 14G15, 14G22, 14G35, 14K15, 14L05, 22E40, 22E45, 22E50, 32S60, 55N33.

Mots clefs. — Algèbre de Hecke, cohomologie d'intersection, compactifications, conjecture de Gouvêa-Mazur, conjecture de Grothendieck, conjecture de Langlands locale, correspondance fonctorielle, correspondance de Jacquet-Langlands, déformations de groupes formels, ensembles μ -admissibles et μ -permis, espaces analytiques rigides, espaces de modules, espace localement symétrique, fonctions L , fonction zêta semi-simple, forme automorphe, forme automorphe p -adique, formes modulaires, formule des traces, formule des traces de Lefschetz, groupes de Barsotti-Tate, groupe p -divisible, méthode de descente, modèle de Whittaker, pentes, polygones de Newton, séries d'Eisenstein, sous-groupes parahoriques, tour d'Igusa, variétés abéliennes, variétés de Deligne-Lusztig affines, variété de Shimura.

FORMES AUTOMORPHES (I)

ACTES DU SEMESTRE DU CENTRE ÉMILE BOREL,
PRINTEMPS 2000

édité par Jacques Tilouine, Henri Carayol, Michael Harris,
Marie-France Vignéras

Résumé. — Ce volume est le premier d'une série de deux consacrés aux formes automorphes sous leurs aspects géométrique et arithmétique et à certains points du programme de Langlands. Les thèmes abordés dans ce volume concernent les formes modulaires p -adiques, la correspondance locale de Langlands pour $GL(n)$, la cohomologie des variétés de Shimura, leur réduction modulo p et leurs stratifications associées aux polygones de Newton.

Abstract (Automorphic forms (I), Proceedings of the Semester of the Émile Borel Center, Spring 2000)

This volume is the first of a series of two devoted to Automorphic Forms, in a geometric and arithmetic point of view. They also deal with certain parts of Langlands program. The themes treated in this volume include p -adic modular forms, the local Langlands correspondence for $GL(n)$, the cohomology of Shimura varieties, their reduction modulo p and their stratification by Newton polygons.

TABLE DES MATIÈRES

Résumés des articles	ix
Abstracts	xiii
Préface	xvii
 K. BUZZARD — <i>Questions about slopes of modular forms</i>	1
Introduction	1
1. $\Gamma_0(N)$ -regularity	5
2. The conjecture	7
3. Remarks on the conjecture	10
4. Consequences of the conjecture and related questions	11
References	14
 M. HARRIS — <i>The Local Langlands correspondence: Notes of (half) a course at the IHP Spring 2000</i>	17
Introduction	18
1. Galois representations attached to automorphic representations of $GL(n)$..	24
2. Shimura varieties as moduli varieties	35
3. p -divisible $\mathcal{O}$ -modules and Drinfel'd bases	46
4. Stratification and vanishing cycles	58
5. Construction of a local correspondence	74
6. The second basic identity and Isogeny classes in the special fiber	92
7. Comparison of trace formulas	108
8. Strata in Shimura varieties of PEL type	125
Appendices	137
References	142
 H. HIDA — <i>p-Adic automorphic forms on reductive groups</i>	147
1. Introduction	148
2. Elliptic Curves	155
3. Vertical Control for Elliptic Modular Forms	166

4. Hecke Equivariance of the Eichler-Shimura Map	170
5. Moduli of Abelian Schemes	182
6. Shimura Varieties	197
7. Formal Theory of Automorphic Forms	207
8. Vertical Control for Projective Shimura Varieties	219
9. Hilbert Modular Forms	230
10. Igusa Towers	241
References	252
F. OORT — <i>Newton polygons and p-divisible groups: a conjecture by Grothendieck</i>	255
Introduction	255
1. Notations	256
2. Results : deformations of p -divisible groups	259
3. Results : deformations of polarized p -divisible groups and of abelian varieties	260
4. Methods : deformations to $a \leq 1$	261
5. Methods : Cayley-Hamilton	263
6. Polarized abelian varieties and quasi-polarized p -divisible groups	263
7. Some questions and conjectures	265
References	267
M. RAPOPORT — <i>A guide to the reduction modulo p of Shimura varieties</i>	271
1. Motivation : The elliptic modular curve	273
Part I. Local theory	
2. Parahoric subgroups	277
3. μ -admissible and μ -permissible set	280
4. Affine Deligne-Lusztig varieties	288
5. The sets $X(\mu, b)_K$	291
6. Relations to local models	297
Part II. Global theory	
7. Geometry of the reduction of a Shimura variety	299
8. Pseudomotivic and quasi-pseudomotivic Galois gerbs	302
9. Description of the point set in the reduction	305
10. The semi-simple zeta function	308
References	311
Notes added June 2003	314
Additional references	318
L. SAPER — <i>$\mathcal{L}$-modules and the Conjecture of Rapoport and Goresky-MacPherson</i>	319
1. Introduction	320
2. Compactifications	320
3. The conjecture	322

4. A generalization	323
5. $\mathcal{L}$ -modules	324
6. Examples of $\mathcal{L}$ -modules	326
7. Micro-support of $\mathcal{L}$ -modules	326
8. A vanishing theorem for $\mathcal{L}$ -modules	328
9. Micro-purity of intersection cohomology	329
10. Functoriality of micro-support and proof of the Main Theorem	330
11. Example/application: ordinary cohomology	331
References	333
 D. SOUDRY — <i>On Langlands functoriality from classical groups to GL_n</i>	335
Introduction	335
1. The weak lift from SO_{2n+1} to GL_{2n}	337
2. L -functions for $G \times \mathrm{GL}_k$, where G is a quasi-split classical group (generic representations)	347
3. On the weak lift from a quasi-split classical group to GL_N	361
4. Illustrations of Proofs in Low Rank Examples	368
References	388
 M. STRAUCH — <i>On the Jacquet-Langlands correspondence in the cohomology of the Lubin-Tate deformation tower</i>	391
1. Introduction	392
2. Deformation spaces and their cohomology groups	394
3. The approach via a Lefschetz trace formula	400
4. Fixed points and the period morphism	404
References	408

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Questions about slopes of modular forms

KEVIN BUZZARD 1

Nous formulons une conjecture prédisant, dans de nombreux cas, les valuations p -adiques exactes des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p agissant sur les espaces de formes modulaires classiques. Cette conjecture a des conséquences très concrètes sur la théorie classique, mais elle suggère aussi de nombreuses symétries inexplicées concernant les courbes de Coleman-Mazur.

The Local Langlands correspondence : Notes of (half) a course at the IHP Spring 2000

MICHAEL HARRIS 17

L'article contient une description assez complète des principaux résultats du livre de l'auteur avec Richard Taylor, qui décrit les représentations galoisiennes réalisées dans la cohomologie de certaines variétés de Shimura associées aux groupes unitaires, et qui obtient la conjecture locale de Langlands pour $GL(n)$ d'un corps p -adique comme conséquence. Les principales étapes de la démonstration de la conjecture locale de Langlands y sont présentées, parfois simplifiées. Le gros de l'article concerne la géométrie de la variété de Shimura aux places de mauvaise réduction, où l'on dispose néanmoins de bons modèles locaux, et la description des points dans la fibre spéciale à la manière de Langlands et Kottwitz. La dernière section de l'article décrit les extensions éventuelles de ces résultats aux variétés de Shimura plus générales, ainsi qu'un compte rendu des travaux de Laurent Fargues sur ces questions.

p-Adic automorphic forms on reductive groups

HARUZO HIDA 147

Nous démontrons le contrôle vertical pour les formes automorphes ordinaires p -adiques et l'irréductibilité de la tour d'Igusa pour les variétés de Shimura symplectique et unitaire.

Newton polygons and p-divisible groups : a conjecture by Grothendieck

FRANS OORT 255

En 1970 Grothendieck a formulé une conjecture concernant les déformations de groupes p -divisibles (groupes de Barsotti-Tate). Nous décrivons une

démonstration de cette conjecture. Cela donne une information sur des strates définies par le polygone de Newton dans les espaces de modules des variétés abéliennes en caractéristique positive.

A guide to the reduction modulo p of Shimura varieties

MICHAEL RAPOPORT 271

Cet article est un survol de résultats sur la réduction des variétés de Shimura à structure de niveau parahorique.

$\mathcal{L}$ -modules and the Conjecture of Rapoport and Goresky-MacPherson

LESLIE SAPER 319

Considérons les groupes de cohomologie d'intersection (de perversité intermédiaire) de diverses compactifications d'un espace localement hermitien symétrique. Rapoport et, indépendamment, Goresky et MacPherson ont conjecturé que ces groupes coïncident pour la compactification de Borel-Serre réductive et la compactification de Baily-Borel-Satake. Cet article décrit la théorie des $\mathcal{L}$ -modules et la façon dont elle peut s'employer pour résoudre la conjecture. Plus généralement, nous traitons une compactification de Satake pour laquelle toutes les composantes réelles à la frontière sont de « rang égal ». Les détails en seront disponibles ailleurs [26]. Comme application supplémentaire de la théorie des $\mathcal{L}$ -modules, nous prouvons un théorème d'annulation sur le groupe de cohomologie ordinaire d'un espace localement symétrique. Ceci répond à une question soulevée par Tilouine.

On Langlands functoriality from classical groups to GL_n

DAVID SOUDRY 335

Cet article est une exposition de la méthode de descente de Ginzburg, Rallis et Soudry. Cette méthode construit, pour une représentation irréductible, automorphe et cuspidale τ telle que $\tau = \tau^*$, une représentation irréductible, automorphe, cuspidale et générique $\sigma(\tau)$ d'un groupe classique quasi-déployé G (qui dépend de GL_n et τ), telle que τ corresponde à $\sigma(\tau)$ par la correspondance fonctorielle faible (« weak lifting »). Cette construction est valable aussi pour toutes les représentations de $GL_n(\mathbb{A})$ qui appartiennent à la partie dite « tempérée » de l'image de la correspondance fonctorielle de Langlands de G à GL_n .

On the Jacquet-Langlands correspondence in the cohomology of the Lubin-Tate deformation tower

MATTHIAS STRAUCH 391

Soient F un corps local non-archimédien et $\mathbb{X}$ un $\mathfrak{o}_F$ -module formel de hauteur n sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Les schémas de déformations de $\mathbb{X}$ munies de structures de niveau de Drinfeld fournissent un système projectif d'espaces analytiques rigides $(M_K)_K$, où K parcourt l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts de $G = GL_n(F)$. La limite inductive H_c^* des espaces $H_c^*(M_K \otimes \overline{F}^\wedge, \mathbb{Q}_\ell)$ ($\ell \neq p$)