

381

ASTÉRISQUE

2016

ON THE DERIVED CATEGORY OF 1-MOTIVES

Luca BARBIERI-VIALE and Bruno KAHN

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 381, 2016

Comité de rédaction

Ahmed ABBES	Damien GABORIAU
Viviane BALADI	Michael HARRIS
Gérard BESSON	Fabrice PLANCHON
Laurent BERGER	Pierre SCHAPIRA
Philippe BIANE	Bertrand TOËN
Hélène ESNAULT	
Éric VASSEROT (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro: 50 € (\$ 75)

Abonnement Europe: 530 €, hors Europe: 569 € (\$ 853)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél: (33) 01 44 27 67 99 • Fax: (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2016

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179
ISBN 978-2-85629-837-4

Directeur de la publication: Marc Peigné

381

ASTÉRISQUE

2016

ON THE DERIVED CATEGORY OF 1-MOTIVES

Luca BARBIERI-VIALE and Bruno KAHN

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Luca Barbieri-Viale

Dipartimento di Matematica “F. Enriques”, Università degli Studi di Milano, Via C. Saldini, 50, I-20133 Milano, Italy
`luca.barbieri-viale@unimi.it`

Bruno Kahn

IMJ-PRG, Case 247, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France
`bruno.kahn@imj-prg.fr`

Classification mathématique par sujet (2000). — 19E15, 14C15; 14F20, 14C30, 18E30.

Mots-clefs. — 1-motifs, motifs triangulés, théorème de Roïtman, conjecture de Deligne.

ON THE DERIVED CATEGORY OF 1-MOTIVES

by Luca BARBIERI-VIALE and Bruno KAHN

Abstract. — We embed the derived category of Deligne 1-motives over a perfect field into the étale version of Voevodsky’s triangulated category of geometric motives, after inverting the exponential characteristic. We then show that this full embedding “almost” has a left adjoint $LAlb$. Applying $LAlb$ to the motive of a variety we get a bounded complex of 1-motives, that we compute fully for smooth varieties and partly for singular varieties. Among applications, we give motivic proofs of Roïtman type theorems and new cases of Deligne’s conjectures on 1-motives.

Résumé (Sur la catégorie dérivée des 1-motifs.) — Nous plongeons la catégorie dérivée des 1-motifs de Deligne sur un corps parfait dans la version étale de la catégorie triangulée des motifs géométriques de Voevodsky, après avoir inversé l’exposant caractéristique. Nous montrons ensuite que ce plongement a « presque » un adjoint à gauche $LAlb$. En appliquant $LAlb$ au motif d’une variété, on obtient un complexe de 1-motifs, que nous calculons entièrement dans le cas des variétés lisses et partiellement dans le cas des variétés singulières. Parmi les applications, nous donnons des preuves motiviques de théorèmes de type Roïtman, et établissons de nouveaux cas des conjectures de Deligne sur les 1-motifs.

CONTENTS

Introduction	1
General assumptions and notations	3
Outline	5
0.1. The derived category of 1-motives, integrally	5
0.2. $\mathbb{Z}[1/p]$ -integral equivalence	5
0.3. Duality	5
0.4. Left adjoint	6
0.5. Smooth schemes	6
0.6. LAlb and RPic	7
0.7. Singular schemes	7
0.8. Curves	7
0.9. Roïtman's theorem	8
0.10. The homotopy t -structure and 1-motivic sheaves	8
0.11. Internal Hom and tensor structure	8
0.12. A conceptual proof of Deligne's conjectures	9
0.13. Hodge structures	9
0.14. Mixed realizations	10
0.15. ℓ -adic	10
0.16. Going further	10
0.17. Caveat	10
A small reading guide	11
 Part I. The universal realization functor	 13
 1. The derived category of 1-motives	 15
1.1. Commutative group schemes	15
1.2. Deligne 1-motives	17
1.3. Weights and cohomological dimension	19
1.4. Group schemes and sheaves with transfers	20
1.5. Representable sheaves and exactness	22
1.6. Local Exts and global Exts	24
1.7. Homotopy invariance and strict homotopy invariance	25
1.8. Étale motivic complexes	27

1.9. 1-motives with torsion and an exact structure on $\mathcal{M}_1[1/p]$	29
1.10. The derived category of 1-motives	31
1.11. Torsion objects in the derived category of 1-motives	31
1.12. Discrete sheaves and permutation modules	33
1.13. Cartier duality and 1-motives with cotorsion	34
1.14. How not to invert p	37
2. Universal realization	39
2.1. Statement of the theorem	39
2.2. Construction of T	40
2.3. Full faithfulness of T	40
2.4. Gersten's principle	41
2.5. An important computation	41
2.6. Essential image	43
2.7. The universal realization functor	44
3. 1-motivic sheaves and the homotopy t-structure	45
3.1. Some useful lemmas	45
3.2. Breen's method	47
3.3. 1-motivic sheaves	48
3.4. Extensions of 1-motivic sheaves	52
3.5. A basic example	54
3.6. Application: the Néron-Severi group of a smooth scheme	55
3.7. Technical results on 1-motivic sheaves	56
3.8. Presenting 1-motivic sheaves by group schemes	57
3.9. The transfer structure on 1-motivic sheaves	59
3.10. 1-motivic sheaves and DM	61
3.11. Comparing t -structures	62
3.12. Global Ext^i with transfers	63
3.13. Local Ext^i with transfers	64
3.14. Ext^n with and without transfers	66
3.15. t -exactness	68
4. Comparing two dualities	71
4.1. Biextensions of 1-motives	71
4.2. Biextensions of complexes of 1-motives	76
4.3. A pairing with finite coefficients	77
4.4. Comparing two Ext groups	78
4.5. Two Cartier dualities	79
Part II. The functors LAlb and RPic	81
5. Definition of LAlb and RPic	83
5.1. Motivic Cartier duality	83

5.2. Motivic Albanese	84
5.3. Motivic Pic	86
5.4. Motivic π_0	86
5.5. LAlb and Chow motives	87
6. The adjunction LAlb – Tot with rational coefficients	89
6.1. Rational coefficients revisited	89
6.2. The functor $\text{LAlb}^{\mathbb{Q}}$	91
7. A tensor structure on $D^b(\mathcal{M}_1 \otimes \mathbb{Q})$	93
7.1. Tensor structure	93
7.2. A formula for the internal Hom	95
8. The Albanese complexes and their basic properties	97
8.1. Motives of singular schemes	97
8.2. The homological Albanese complex	98
8.3. The cohomological Picard complex	101
8.4. Relative LAlb and RPic	103
8.5. The Borel-Moore Albanese complex	103
8.6. Cohomological Albanese complex	104
8.7. Compactly supported and homological Pic	105
8.8. Topological invariance	105
Part III. Some computations	107
9. Computing LAlb(X) and RPic(X) for smooth X	109
9.1. The Albanese scheme	109
9.2. The main theorem	110
9.3. Reformulation of Theorem 9.2.2	111
9.4. Proof of Theorem 9.3.2	112
9.5. An application	113
9.6. $\text{RPic}(X)$	113
10. 1-motivic homology and cohomology of singular schemes	115
10.1. $\mathcal{A}_{X/k}$ for $X \in \text{Sch}(k)$	115
10.2. The �h topology	116
10.3. Blow-up induction	118
10.4. $L_i\text{Alb}(X)$ for X singular	119
10.5. The cohomological 1-motives $\text{R}^i\text{Pic}(X)$	120
10.6. Borel-Moore variants	120
11. 1-motivic homology and cohomology of curves	121
11.1. “Chow-K�nneth” decomposition for a curve	121
11.2. $L_i\text{Alb}$ and R^iPic of curves	121
11.3. Borel-Moore variants	123

12. Comparison with Pic^+, Pic^-, Alb^+ and Alb^-	125
12.1. Torsion sheaves	125
12.2. Glueing lemmas	125
12.3. Discrete sheaves	127
12.4. Normal schemes	129
12.5. Some representability results	132
12.6. $L_1\mathrm{Alb}(X)$ and the Albanese schemes	132
12.7. $L_1\mathrm{Alb}(X)$ and $\mathrm{Alb}^-(X)$ for X normal	135
12.8. $\mathrm{RPic}(X)$ and $H_{\mathrm{\acute{e}h}}^*(X, \mathbb{G}_m)$	136
12.9. $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^1(X, \mathbb{G}_m)$ and $H_{\mathrm{\acute{e}h}}^1(X, \mathbb{G}_m)$	137
12.10. $\mathrm{R}^1\mathrm{Pic}(X)$ and $\mathrm{Pic}^+(X)$ for X proper	137
12.11. The Borel-Moore variant	138
12.12. $L_1\mathrm{Alb}^*$ and Alb^+	140
13. Generalizations of Roïtman's theorem	145
13.1. Motivic and classical Albanese	145
13.2. A variant of the Suslin-Voevodsky theorem	147
13.3. Change of topology and motivic Albanese map	147
13.4. A proof of Roïtman's and Spieß-Szamuely's theorems	148
13.5. Generalization to singular schemes	150
13.6. Borel-Moore Roïtman	151
13.7. "Cohomological" Roïtman	152
Part IV. Realizations	155
14. An axiomatic version of Deligne's conjecture	157
14.1. A review of base change	157
14.2. A weight filtration on $\mathcal{M}_1 \otimes \mathbb{Q}$	157
14.3. A left adjoint in the category of realizations	158
14.4. Realization functor	159
14.5. The base change theorem	161
15. The Hodge realization	165
15.1. $L\mathrm{Alb}^{\mathcal{J}}$ for mixed Hodge structures	165
15.2. Huber's Hodge realization functor	166
15.3. Deligne's conjecture	168
15.4. Deligne's Hodge realization functor	169
16. The mixed realization	171
16.1. $L\mathrm{Alb}^{\mathcal{J}}$ for mixed realizations	171
16.2. Huber's mixed realization functor	174
16.3. Deligne's conjecture	174
17. The ℓ-adic realization in positive characteristic	177