BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PAUL BÉZIVIN

Fonctions multiplicatives et équations différentielles

Bulletin de la S. M. F., tome 123, n° 3 (1995), p. 329-349

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1995__123_3_329_0>

Bull. Soc. math. France,
123, 1995, p. 329–349.

FONCTIONS MULTIPLICATIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PAR

JEAN-PAUL BEZIVIN (*)

RÉSUMÉ. — Soit $f(n)$ une fonction multiplicative $\mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$. On suppose que la fonction $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)z^n$ vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes. Nous montrons alors qu'il existe un entier rationnel k et une fonction multiplicative périodique $\omega(n)$ tels que $f(n) = n^k\omega(n)$. Ceci généralise un résultat de Sarkozy.

ABSTRACT. — Let $f(n)$ be a multiplicative function of $\mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$. We suppose that the power series $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)z^n$ verify a linear homogeneous differential equation with polynomial coefficients. We show then that there exists a rational integer k and a periodic multiplicative function $\omega(n)$ such that $f(n) = n^k\omega(n)$.This extend a result of Sarkozy.

1. Introduction et résultats

Soit f une fonction multiplicative de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire une fonction vérifiant $f(nm) = f(n)f(m)$ pour tout couple (m, n) d'entiers premiers entre eux. Dans [SA], A. SARKOZY caractérise les fonctions multiplicatives telles que la série entière $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)z^n$ soit une fraction rationnelle, ou, ce qui est équivalent, que la suite $f(n)$ vérifie une relation de récurrence de la forme :

$$\sum_{i=0}^{s} a_i f(n+i) = 0$$

où les a_i sont des constantes complexes avec a_s non nulle. On a le résultat suivant :

(*) Texte reçu le 17 novembre 1993, révisé le 5 septembre 1994.
J.-P. BEZIVIN, Université de Caen, Département de Mathématiques, 14032 Caen CEDEX (France). Email : bezivin@math.unicaen.fr.

Classification AMS : 11 A 25, 34 A 20.

THÉORÈME S. — *Soit f une fonction multiplicative de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$, telle que la série $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)z^n$ soit une fraction rationnelle. Alors ou la fonction f est nulle à partir d'un certain rang, ou il existe un entier $h \in \mathbb{N}$ et une fonction multiplicative périodique $\omega(n)$ tels que $f(n) = n^h\omega(n)$.*

Ces résultats ont été généralisés depuis (voir [HEMA]) et récemment, L. LUCHT a donné une démonstration très simple du THÉORÈME S (voir [LU]).

Dans cet article, nous allons déterminer les fonctions multiplicatives f à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, telles que la série génératrice associée

$$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)z^n$$

vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients polynômes :

$$\sum_{i=0}^{s} P_i(z)g^{(i)}(z) = 0$$

les P_i étant des polynômes avec P_s non nul. Ceci est équivalent à dire que la suite $f(n)$ vérifie une relation de récurrence linéaire de la forme :

$$\sum_{k=0}^{t} Q_k(n)f(n+k) = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, les Q_k étant des polynômes avec Q_t non nul.

Nous allons démontrer les résultats suivants :

THÉORÈME 1. — *Soit f une fonction multiplicative de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que $f(n)$ appartient à $\mathbb{R}$ pour tout n, ou que $f(n)$ est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. On suppose de plus que la série $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)z^n$ vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes. Alors ou la fonction f est nulle à partir d'un certain rang, ou il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ et une fonction multiplicative périodique $\omega(n)$ tels que l'on ait $f(n) = n^k\omega(n)$ pour tout n.*

Le résultat du théorème n'est plus vrai si on suppose que $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)z^n$ vérifie une équation différentielle *algébrique*, comme le montre l'exemple de la fonction caractéristique des carrés de $\mathbb{N}$. On sait en effet que la série $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}$ vérifie une équation différentielle algébrique (voir [RU]).

REMARQUE. — Nous pensons bien sûr que le résultat est vrai sans l'hypothèse $f(n) \neq 0$ pour tout n.

Nous déterminerons aussi les fonctions multiplicatives à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que leur série génératrice soit algébrique :

THÉORÈME 2. — *Soit f une fonction multiplicative de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que la série $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)z^n$ est une série algébrique, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ non nul tel que $P(z,g(z)) = 0$. Alors ou la fonction f est nulle à partir d'un certain rang, ou il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ et une fonction multiplicative périodique $\omega(n)$ tels que l'on ait $f(n) = n^k\omega(n)$ pour tout n.*

Nous utiliserons très souvent dans ce qui suit la propriété qu'une série entière de rayon de convergence non nul, vérifiant une équation différentielle linéaire à coefficients polynômes, se prolonge au revêtement universel de $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de points, ce que nous traduirons en disant qu'une telle série n'a qu'un nombre fini de singularité dans $\mathbb{C}$.

Comme nous utilisons aussi très souvent dans nos démonstrations le fait que les coefficients de Taylor des séries considérées vérifient des relations de récurrence à coefficients polynômes en la variable n (ce qui est équivalent au fait que la série vérifie une équation différentielle à coefficients polynômes, voir plus haut), nous ne traitons donc pas le cas où la seule hypothèse sur la série génératrice, supposée de rayon de convergence non nul, est d'avoir simplement un nombre fini de singularité dans $\mathbb{C}$, qui reste donc un problème ouvert.

On peut se demander quelles sont les fonctions multiplicatives périodiques qui interviennent dans les résultats ci-dessus.

Le lecteur intéressé pourra consulter [KA2, Lemma 1, p. 250], où une description de telles fonctions est donnée.

A titre d'exemple, pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, la fonction

$$f(n) = \omega(1 + (-1)^n) - (-1)^n$$

est une fonction multiplicative, périodique de période 2, qui n'est complètement multiplicative que si $\omega = 1$, c'est-à-dire si $f(n) = 1$ pour tout n.

L'auteur remerçie E. REYSSAT d'avoir attiré son attention sur la référence [LU].

2. Rappels de résultats

LEMME 2.1. — *Soit $\psi(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ une série entière à coefficients dans $\mathbb{C}$. On suppose que $\psi(z)$ n'est pas un polynôme et vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes. Il existe alors un nombre rationnel s tel que la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n\,!)^s} z^n$$

ait un rayon de convergence non nul et fini.

Démonstration. — Voir [RA].

LEMME 2.2. — *Soit* $\psi(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ *une série formelle à coefficients dans* $\mathbb{C}$. *On suppose que* $\psi(z)$ *vérifie une équation différentielle à coefficients polynômes. Soit* :

$$\sum_{j=0}^{t} P_j(n) a(n+j) = 0$$

une relation de récurrence à coefficients polynômes en la variable n, *avec* P_s *non nul, vérifiée par la suite* $a(n)$. *Soit* q *un entier naturel non nul*; *alors la suite* $b(n) = a(nq)$ *vérifie une relation de récurrence de la forme* :

$$\sum_{k=0}^{m} H_k(n) b(n+k) = 0,$$

les H_k *étant des polynômes avec* H_m *non nul, l'entier* m *étant inférieur ou égal à* t. *De plus, si le rayon de convergence de* $\psi(z)$ *est non nul et fini, les singularités de la série* $\theta(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$ *sont parmi les puissances* q*-ièmes des singularités de la série* $\psi(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$.

Démonstration. — Voir [BE1, p. 137].

LEMME 2.3. — *Soient* $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ *et* $g(z) = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n$ *deux séries entières. On suppose que* $f(z)$ *et* $g(z)$ *ont un rayon de convergence non nul, et un nombre fini de singularités dans* $\mathbb{C}$. *Alors la série*

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n,$$

(*produit de Hadamard de* f *et de* g), *ne peut avoir comme singularités que les produits d'une singularité de* f *par une singularité de* g.

Démonstration. — Voir [BI, p. 21–22] ou [JU, p. 297].

LEMME 2.4. — *Soit* f *de* $\mathbb{N}^*$ *dans* $\mathbb{C}$ *une fonction multiplicative périodique, c'est-à-dire telle qu'il existe* $m \in \mathbb{N}$, *avec* $m \geq 1$, *telle que* $f(n+m) = f(n)$ *pour tout* n *assez grand. Alors* $f(n)$ *est purement périodique : on a* $f(n+m) = f(n)$ *pour tout* $n \geq 1$.

Démonstration. — Voir [KAN].

LEMME 2.5. — *Soit* $\psi(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ *une série formelle à coefficients dans* $\mathbb{C}$. *On suppose que* $\psi(z)$ *vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes et qu'il existe un sous-groupe de type fini* G *du groupe multiplicatif de* $\mathbb{C}$, *tel que* $a_n \in G \cup \{0\}$ *pour tout entier* n. *Alors* $\psi(z)$ *est une fraction rationnelle.*

Démonstration. — Voir [BE2, p. 62, th. 4].