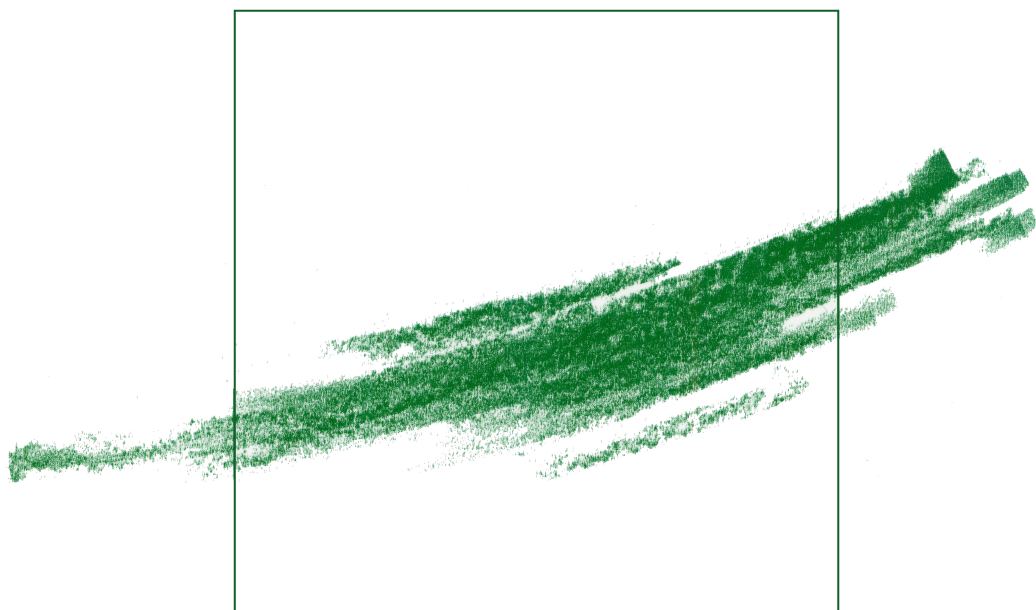


C O U R S   S P É C I A L I S É S  
C O L L E C T I O N   S M F

# Introduction à la théorie de jauge

Andrei TELEMAN



18



# **INTRODUCTION À LA THÉORIE DE JAUGE**

**Andrei Teleman**

### **Comité de rédaction**

Antoine CHAMBERT-LOIR  
Julie DÉSERTI

Bertrand MAURY

Grégory MIERMONT (Directeur)

### **Diffusion**

Maison de la SMF  
Case 916 - Luminy  
13288 Marseille Cedex 9  
France  
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency  
O-131, The Shopping Mall  
Arjun Marg, DLF Phase 1  
Gurgaon 122002, Haryana  
Inde

AMS  
P.O. Box 6248  
Providence RI 02940  
USA  
www.ams.org

EDP Sciences  
17, avenue du Hoggar  
91944 les Ulis Cedex A  
France  
www.epdsciences.com

### **Tarifs**

*Vente au numéro* : 60 € (\$ 90)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

### **Secrétariat : Nathalie Christiaën**

Cours Spécialisés

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2012

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 1284-6090

ISBN 978-2-85629-322-5

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

**COURS SPÉCIALISÉS 18**

# **INTRODUCTION À LA THÉORIE DE JAUGE**

**Andrei Teleman**

**Société Mathématique de France 2012**



## TABLE DES MATIÈRES

|                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>0. Introduction</b>                                                                | 5  |
| <b>1. Théorie de Hodge sur les variétés compactes</b>                                 | 9  |
| 1.1. Le théorème de de Rham                                                           | 9  |
| 1.2. Le théorème de Hodge                                                             | 10 |
| 1.3. Théorie de Hodge en dimension 4                                                  | 14 |
| <b>2. Connexions linéaires et courbure</b>                                            | 17 |
| 2.1. Connexions linéaires sur les fibrés vectoriels                                   | 17 |
| 2.2. Classes de Chern et courbure                                                     | 22 |
| 2.3. Réduction du groupe structural d'un fibré vectoriel                              | 23 |
| <b>3. Fibrés principaux et connexions</b>                                             |    |
| <b>sur les fibrés principaux</b>                                                      | 29 |
| 3.1. Fibrés principaux et fibrés associés                                             | 29 |
| 3.2. Connexions sur les fibrés principaux et vectoriels                               | 32 |
| 3.3. Morphismes et isomorphismes de fibrés principaux                                 |    |
| Le problème de classification                                                         | 37 |
| 3.4. Le groupe de jauge d'un fibré et son algèbre de Lie                              | 39 |
| <b>4. Connexions de Yang-Mills</b>                                                    |    |
| <b>et connexions anti-autoduales</b>                                                  | 45 |
| 4.1. La fonctionnelle et les équations de Yang-Mills                                  | 45 |
| 4.2. L'espace des modules des connexions de Yang-Mills                                |    |
| sur un fibré hermitien en droites                                                     | 50 |
| <b>5. Structures Spin et <math>\text{Spin}^c</math>, opérateurs de Dirac,</b>         |    |
| <b>la formule de Weitzenböck</b>                                                      | 55 |
| 5.1. Les groupes $\text{Spin}(n)$ , $\text{Spin}^c(n)$                                |    |
| Isomorphismes remarquables en dimension 3 et 4                                        | 55 |
| 5.2. Structures Spin et structures $\text{Spin}^c$                                    | 58 |
| 5.3. Opérateurs de Dirac et la formule de Weitzenböck                                 | 65 |
| <b>6. Espaces de modules de monopoles de Seiberg-Witten. Le théorème de Donaldson</b> |    |
| <b>sur la forme d'intersection d'une 4-variété</b>                                    | 71 |
| 6.1. Les équations de Seiberg-Witten                                                  | 71 |
| 6.2. La borne <i>a priori</i> de la composante spinorielle                            | 74 |

|                                                                                                                    |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.3. La compacité de l'espace de modules des monopoles .....                                                       | 75         |
| 6.4. Le complété de Sobolev de l'espace des configurations<br>et du groupe de jauge .....                          | 80         |
| 6.5. L'espace des modules des solutions de Sobolev .....                                                           | 81         |
| 6.6. Le complexe elliptique de déformation. La dimension présumée .....                                            | 86         |
| 6.7. Modèles locaux de type Kuranishi .....                                                                        | 89         |
| 6.8. Orientabilité .....                                                                                           | 93         |
| 6.9. Transversalité et régularité générique .....                                                                  | 94         |
| 6.10. La topologie de $\mathcal{B}^*$ .....                                                                        | 99         |
| 6.11. Le théorème de Donaldson sur la forme<br>d'intersection d'une 4-variété .....                                | 102        |
| <b>7. Les invariants de Seiberg-Witten .....</b>                                                                   | <b>109</b> |
| 7.1. Cobordisme entre espaces des modules .....                                                                    | 110        |
| 7.2. La définition des invariants .....                                                                            | 111        |
| <b>8. Monopoles sur les surfaces kähleriennes .....</b>                                                            | <b>119</b> |
| 8.1. Les équations de Seiberg-Witten sur une surface kählérienne .....                                             | 119        |
| 8.2. Fibrés holomorphes, diviseurs effectifs,<br>paires holomorphes, vortex et monopoles .....                     | 125        |
| <b>9. Exemples et applications .....</b>                                                                           | <b>147</b> |
| 9.1. Premiers exemples .....                                                                                       | 147        |
| 9.2. Invariance $\mathcal{C}^\infty$ de la rationalité .....                                                       | 149        |
| 9.3. La perturbation de Witten. Les invariants de Seiberg-Witten<br>des surfaces kähleriennes à $p_g > 0$ .....    | 152        |
| <b>A. ....</b>                                                                                                     | <b>171</b> |
| A.1. Sections distributions et<br>sections de Sobolev d'un fibré vectoriel .....                                   | 171        |
| A.2. Opérateurs elliptiques. Régularité. Estimations elliptiques. Complexes<br>elliptiques .....                   | 173        |
| A.3. Théorèmes de plongement et de multiplication pour les sections de<br>Sobolev sur les variétés compactes ..... | 177        |
| A.4. Submersions et sections régulières sur les variétés banachiques. Le<br>théorème de Sard-Smale .....           | 178        |
| A.5. Familles d'opérateurs de Fredholm .....                                                                       | 180        |
| A.6. Équations de type Kazdan-Warner .....                                                                         | 184        |
| <b>Bibliographie .....</b>                                                                                         | <b>187</b> |



## CHAPITRE 0

### INTRODUCTION

Ce texte a été rédigé en suivant les deux cours de Master 2 intitulés « Introduction à la théorie de jauge » donnés par l’auteur à l’université de Provence. Il est accessible aux étudiants qui ont suivi un cours de géométrie différentielle et un cours de topologie algébrique, et qui ont des notions de base d’analyse (espaces de Sobolev, distributions, opérateurs différentiels). Nous avons introduit un appendice qui regroupe les résultats d’analyse globale (analyse sur les variétés) utilisés dans le cours.

La théorie de jauge est un domaine nouveau très actif, qui se trouve à l’intersection de la géométrie différentielle, de la topologie, de l’analyse globale et de la géométrie complexe. L’idée fondamentale de la théorie de jauge est d’étudier *les espaces de modules* des solutions de certains systèmes d’équations à dérivées partielles sur une variété différentiable et d’obtenir des informations sur la variété (par exemple des informations sur son type de difféomorphisme) à partir de ces espaces de modules.

À partir de cette idée on a obtenu les premiers résultats spectaculaires dans le domaine de la topologie différentielle 4-dimensionnelle :

- on a montré que la forme d’intersection d’une 4-variété différentiable orientée compacte est triviale sur  $\mathbb{Z}$  si cette forme est définie, ce qui, d’après les résultats de Freedman concernant la classification des variétés topologiques, est totalement faux dans le contexte topologique ;
- on a introduit et calculé explicitement les premiers invariants  $\mathcal{C}^\infty$  en dimension 4, à savoir *les invariants de Donaldson*, à l’aide desquels on a trouvé les premières *paires exotiques* (paires de 4-variétés différentiables orientées, qui sont homéomorphes mais non difféomorphes).

Il est intéressant de noter que les premières paires exotiques ont été trouvées dans une classe très spéciale et très importante de 4-variétés : les surfaces algébriques complexes.

En 1994 une nouvelle théorie de jauge, *la théorie de Seiberg-Witten*, a été élaborée. Tandis que le point de départ de la théorie de Donaldson est l’équation d’anti-autodualité pour une connexion dans un fibré principal de groupe structural compact (par exemple  $SU(2)$  ou  $PU(2)$ ), dans la théorie de Seiberg-Witten on étudie les

équations de Seiberg-Witten (les équations de monopole) pour une paire formée par une  $U(1)$ -connexion et un spineur.

L'équation d'anti-dualité, ainsi que les équations de Seiberg-Witten ont des interprétations physiques. Les invariants de Seiberg-Witten sont plus simples à introduire et à calculer que les invariants de Donaldson. En effet, tandis que les espaces de modules des solutions des équations de Seiberg-Witten sont compacts, les espaces de modules de connexions anti-autoduales ne le sont pas en général, et la construction d'une compactification canonique avec de bonnes propriétés est l'un des chapitres les plus difficiles de la théorie de Donaldson.

Ce cours est essentiellement dédié à la théorie de Seiberg-Witten (*qui est accessible aux étudiants*), mais il contient aussi des éléments de la théorie de Donaldson : le groupe de jauge d'un fibré principal, les équations de Yang-Mills, les équations d'anti-dualité, des exemples d'espaces de modules de connexions de Yang-Mills.

On peut utiliser ce texte pour un cours de niveau Master 2 ou École doctorale. Pour soutenir les étudiants intéressés par le sujet et pour assurer une assimilation solide du matériel, une bonne idée serait de donner en parallèle un cours d'analyse globale dédié à la théorie des opérateurs différentiels sur les variétés différentiables, un cours de topologie algébrique qui introduit les classes caractéristiques et un cours de géométrie complexe.

Le cours est structuré comme suit :

On commence par une brève introduction à la théorie de Hodge, puis on continue avec la théorie des fibrés et des connexions. Nous présentons soigneusement les notions fondamentales de connexion, courbure, réduction du groupe structural aussi bien dans le cadre des fibrés vectoriels que dans le cadre (plus abstrait) des fibrés principaux, en expliquant en détail la relation entre les deux points de vue.

On continue avec un chapitre introductif à la théorie de Yang-Mills. On introduit la fonctionnelle de Yang-Mills sur l'espace des connexions sur un fibré principal de groupe structural compact et on montre que cette fonctionnelle est minorée par un invariant topologique du fibré (la « borne topologique »). Nous étudions les connexions qui correspondent à cette borne topologique (et qui réalisent, donc, le minimum permis par « la contrainte topologique »). Le résultat fondamental de ce chapitre est une description détaillée de l'espace de modules des connexions de Yang-Mills sur un fibré hermitien en droites.

Cette partie du cours est très importante du point de vue pédagogique : elle contient des résultats importants, démontrés avec des méthodes relativement élémentaires, qui se trouvent à l'intersection de la théorie de Donaldson et de la théorie de Seiberg-Witten. De plus, on présente dans un contexte accessible, les premiers exemples d'espaces de modules de solutions d'un système différentiel sur une variété compacte. On montre de plus que la géométrie de ces espaces de modules est reliée à la topologie de la variété de base, ce qui est une idée fondamentale de la théorie de jauge.

Le chapitre 5 est dédié à la théorie des structure spinorielles ( $\text{Spin}$  et  $\text{Spin}^c$ ) et aux opérateurs de Dirac sur les 4-variétés. Ces notions fondamentales sont introduites