

Astérisque

AST

**Formule de Chernoff et problèmes statistiques
associés : table des matières**

Astérisque, tome 68 (1979), p. 1

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__68__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__68__1_0)

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORMULE DE CHERNOFF ET PROBLÈMES STATISTIQUES ASSOCIÉS.

	D. DACUNHA-CASTELLE : Introduction_____	3
I.	D. DACUNHA-CASTELLE : Formule de Chernoff pour une suite de variables réelles _____	19
II.	D. DACUNHA-CASTELLE : Formule de Chernoff pour des rapports de vraisemblance _____	25
III.	J. BRETAGNOLLE : Formule de Chernoff pour les lois empiriques de variables à valeurs dans des espaces généraux _____	33
IV.	J. DESHAYES, D. PICARD : Grandes et moyennes déviations pour les marches aléatoires _____	53
V.	J. DESHAYES, D. PICARD : Application aux tests de rupture de régression _____	73
VI.	M. DUFLO : Formule de Chernoff pour des chaînes de Markov_____	99
VII.	N. MAIGRET : Majorations de Chernoff et statistique séquen- tielle pour des chaînes de Markov récurrentes au sens de Doeblin_____	125
VIII.	N. MAIGRET : Statistique des chaînes contrôlées felleriennes__	143
IX.	L. BIRGÉ : Vitesses optimales de convergence des estimateurs __	171
X.	G. RUGET : Quelques occurrences des grands écarts dans la litté- rature "électronique"_____	187

Astérisque

DIDIER DACUNHA-CASTELLE

Introduction

Astérisque, tome 68 (1979), p. 3-18

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__68__3_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__68__3_0)

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTRODUCTION

D. DACUNHA-CASTELLE.

I. LES FONDEMENTS PROBABILISTES DE LA THÉORIE DES GRANDES DÉVIATIONS.

La théorie des grandes déviations (grands écarts) concerne la loi faible des grands nombres. Si $X_1 \dots X_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, équidistribuées, d'espérance $EX = 0$, et si $S_n = X_1 + \dots + X_n$, la loi faible des grands nombres assure de la convergence vers 0 de $\frac{S_n}{n}$ (en probabilité). Pour préciser cette convergence, on dispose d'abord du théorème de limite centrale qui étudie la convergence de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$. Soit $a > 0$, on obtient :

$$P(S_n > \sqrt{n} \sigma a) \sim 1 - \Phi(a)$$

où Φ est la répartition de la loi normale et $\sigma^2 = EX^2$. Au lieu d'étudier le grossissement $\sqrt{n}$ de $\frac{S_n}{n}$, on peut étudier les grandes déviations sans grossissement, à savoir $P(S_n > na)$. Ces grandes déviations sont rares et le premier résultat sera que

$$P(S_n > na) \sim e^{-nh(a)} \tag{1},$$

où h est une fonction convenable.

De manière générale, on peut étudier $P(S_n > B_n a)$.

$B_n = O(\sqrt{n})$ donne le théorème de limite centrale et $B_n = O(n)$ les grandes déviations. Entre les deux $\sqrt{n} = \sigma(B_n)$ et $B_n = \sigma(n)$, on trouve la théorie des moyennes déviations, qui conduit à des probabilités de l'ordre de $\frac{1}{n^\alpha}$ pour des α convenables, $\alpha > 0$, dans certains cas.

Bien entendu, l'ensemble de ces théorèmes ne valent que sur des hypothèses convenables sur la queue des distributions des X . Très grossièrement la loi des grands nombres demande $E |X| < \infty$, le théorème limite centrale $E X^2 < \infty$ et les résultats de grandes déviations $E \exp tX < \infty$ pour des $t > 0$. Si les premiers résultats sur les grandes déviations sont dus à KHINCHINE [6], puis avant-guerre par exemple à CRAMER [3] ils ont pris sous l'influence des statisticiens le nom générique de formules de Chernoff [2]. En fait, on trouve d'abord des majorations exponentielles du type $P(S_n > na) \leq e^{-nh(a)}$ qui dans les cas simples sont des applications directes d'une formule de Markov-Tchebychev. La minoration, même dans le cas élémentaire que nous venons d'introduire, a une démonstration intéressante en soi. Elle est une conséquence directe de la loi faible des grands nombres, appliquée à $\frac{S_n}{n}$, non pour la probabilité initiale associée à la loi dF des X , mais pour une nouvelle probabilité P_a obtenue en remplaçant dF par dF_a , avec $\frac{dF_a}{dF}(x) = \frac{e^{tx}}{\phi(t)}$, où t est choisi tel que $\int x dF_a(x) = a$, soit $\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = a$ si $\phi(t) = E \exp tX$.

Ce recentrage de la probabilité permet d'appliquer un théorème ergodique, ici la loi faible ordinaire. Cette idée sera essentielle.

Le chapitre I, élémentaire, souligne que pour qu'une suite Z_n de loi P_n satisfasse à la formule (1), il suffit que la transformée de Laplace Φ_n de P_n existe sur un intervalle contenant 0 et qu'elle ait un comportement ergodique du type $\frac{1}{n} \log \Phi_n(t) \rightarrow L(t)$. Cette convergence assure la loi faible des grands nombres pour les $dP_{n,a}$ obtenues par recentrage. On a aussi le théorème limite centrale pour les $P_{n,a}$ qui donne d'ailleurs un développement plus précis que (1).

La technique utilisée pour obtenir (1) est voisine de celle utilisée par exemple par LINNIK et FELLER [5] pour obtenir des formules de moyennes déviations mais aussi des techniques utilisées pour obtenir des développements affinant le théorème de limite centrale, comme les techniques de point de selle.

Intuitivement, si l'on interprète les X_i comme des variables à valeur