

Astérisque

JEAN-MARC FONTAINE

Groupes p -divisibles sur les corps locaux

Astérisque, tome 47-48 (1977)

http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__47-48__1_0

© Société mathématique de France, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Je voudrais remercier le département de mathématiques de Queen's University, Kingston, Ontario, en particulier P. Ribenboim, de m'avoir donné l'occasion d'éclaircir mes idées sur les schémas en groupes finis et plats lors d'un cours que j'y fis à l'automne 1974.

Les résultats annoncés dans [20], [21] et [22] (dont les démonstrations constituent une partie du chapitre III et du § 1 du chapitre IV du présent mémoire, ainsi qu'une partie de [23]) ont été exposés lors d'un cours au Collège de France (Fondation Peccot) au printemps 1975. Les démonstrations étaient différentes car on utilisait au maximum les résultats connus. Je voudrais remercier la fondation Peccot de son hospitalité et les auditeurs de ce cours de leur patience et de leurs interventions.

Je voudrais aussi remercier tous ceux qui m'ont aidé aux différents stades de ce travail. Tout particulièrement P. Berthelot et W. Messing, mais aussi P. Cartier, P. Deligne, L. Illusie, N. Katz, M. Lazard, B. Mazur, M. Raynaud. Et enfin et surtout J.-P. Serre sans lequel ce travail n'aurait jamais vu le jour.

Ces remerciements seraient incomplets si je n'exprimais ici ma reconnaissance à Mme Guttin-Lombard et à Mlle Marchand qui ont réalisé la frappe du manuscrit.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	2
Chapitre I : THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES SCHÉMAS EN GROUPES AFFINES COMMUTATIFS	
§ 1. Schémas affines	17
§ 2. Groupes affines	20
§ 3. Anneaux et modules profinis	24
§ 4. Schémas formels	30
§ 5. Groupes formels et dualité de Cartier	35
§ 6. Noyaux et conoyaux	39
§ 7. Groupes étales et connexes	45
§ 8. Espaces tangent et cotangent	52
§ 9. Structure des groupes formels connexes sur un corps	57
§ 10. Cohomologie de Hochschild	62
Chapitre II : COVECTEURS DE WITT	
§ 1. Vecteurs et covecteurs de Witt	71
§ 2. Endomorphismes	79
§ 3. Quelques séries formelles	85
§ 4. Le groupe formel des covecteurs	90
§ 5. Relèvement des covecteurs	95
§ 6. Groupe de Cartier et exponentielle d'Artin-Hasse	108
Chapitre III : MODULE DE DIEUDONNÉ	
§ 1. Classification des p-groupes formels	125
§ 2. Extension des scalaires	132
§ 3. Module de Dieudonné et espace tangent	138
§ 4. Module de Dieudonné et espace cotangent	143
§ 5. Dualité	151
§ 6. Groupes formels lisses	160
Chapitre IV : GROUPES FORMELS LISSES SUR UN ANNEAU DE VALUATION DISCRÈTE	
§ 1. Le cas $e = 1$	167
§ 2. Le foncteur $M \mapsto M_{A'}$	187
§ 3. Relèvement des covecteurs (suite)	196
§ 4. Groupes formels lisses sur A'	201
§ 5. Groupes p-divisibles sur A'	220
Chapitre V : COMPLÉMENTS	
§ 1. Le module de Tate	225
§ 2. Travaux de Honda	238
§ 3. Théorie de Cartier (courbes typiques)	245
Bibliographie	258
Summary	261

INTRODUCTION

0.1. Soit p un nombre premier, soit k un corps parfait de caractéristique p , soit $A = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k , soit A' l'anneau des entiers d'une extension finie totalement ramifiée du corps des fractions de A et soit e le degré de cette extension.

Le présent mémoire a pour objet

- la classification, à isomorphisme près, des (schémas en) groupes formels commutatifs sur k ;
- la classification, à isomorphisme près, des (schémas en) groupes formels, lisses et de dimension finie, sur A et sur A' si $e \leq p-1$;
- la classification, à isogénie près, des groupes de Barsotti-Tate (ou groupes p -divisibles) sur A' .

0.2. Ce mémoire a été conçu pour pouvoir être lu par les non-spécialistes : il suffit, en principe, de connaître un peu d'algèbre commutative (par exemple celle de Bourbaki) et les rudiments du langage des catégories (par exemple, [40]). On a essayé d'être aussi "élémentaire" que possible. On a systématiquement négligé le point de vue "géométrique" au profit du point de vue "fonctoriel" (et on a escamoté les difficultés d'ordre logique : les "catégories" de foncteurs que l'on considère ne sont de "vraies" catégories qu'à condition de se restreindre à un univers convenable, ce qui est implicitement supposé). Dans cet esprit, donnons, dès maintenant, quelques définitions (nous les reprendrons dans un cadre plus général au chapitre I) : soit B un anneau qui est soit k , soit A , soit A' :

- on appelle B-anneau fini toute B -algèbre associative, commutative et unitaire qui est un B -module de longueur finie ;
- un B-foncteur formel est un foncteur covariant de la catégorie des B -anneaux finis dans celle des ensembles ; on dit que c'est un schéma fini sur B