

# *Astérisque*

JEAN-PIERRE SERRE

**Arbres, amalgames,  $SL_2$**

*Astérisque*, tome 46 (1977)

<[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1983\\_\\_46\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__46__1_0)>

© Société mathématique de France, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## TABLE DES MATIERES

|                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------|----|
| INTRODUCTION .....                                             | 3  |
| CHAPITRE I - ARBRES ET AMALGAMES                               |    |
| § 1 - <u>Amalgames</u> .....                                   | 7  |
| 1.1. Limites inductives .....                                  | 7  |
| 1.2. Structure des sommes amalgamées .....                     | 8  |
| 1.3. Conséquences du théorème de structure .....               | 12 |
| 1.4. Constructions utilisant les sommes amalgamées .....       | 16 |
| 1.5. Quelques exemples .....                                   | 20 |
| § 2 - <u>Arbres</u> .....                                      | 22 |
| 2.1. Graphes .....                                             | 22 |
| 2.2. Arbres .....                                              | 28 |
| 2.3. Sous-arbres d'un graphe .....                             | 33 |
| § 3 - <u>Arbres et groupes libres</u> .....                    | 38 |
| 3.1. Arbres de représentants .....                             | 38 |
| 3.2. Graphe d'un groupe libre .....                            | 39 |
| 3.3. Actions libres sur un arbre .....                         | 41 |
| 3.4. Application : théorème de Schreier .....                  | 43 |
| Appendice. Présentation d'un groupe d'homéomorphismes .....    | 45 |
| § 4 - <u>Arbres et amalgames</u> .....                         | 48 |
| 4.1. Cas de deux facteurs .....                                | 48 |
| 4.2. Exemples d'arbres associés à des amalgames .....          | 52 |
| 4.3. Applications .....                                        | 53 |
| 4.4. Limite d'un arbre de groupes .....                        | 55 |
| 4.5. Amalgames et domaines fondamentaux (cas général) .....    | 56 |
| § 5 - <u>Structure d'un groupe opérant sur un arbre</u> .....  | 59 |
| 5.1. Groupe fondamental d'un graphe de groupes .....           | 59 |
| 5.2. Mots réduits .....                                        | 64 |
| 5.3. Revêtement universel relatif à un graphe de groupes ..... | 71 |
| 5.4. Le théorème de structure .....                            | 75 |
| 5.5. Application : théorème de Kuroš .....                     | 77 |

|                                                                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 6 - <u>Amalgames et points fixes</u> .....                                                                                                  | 81  |
| 6.1. La propriété de point fixe pour les groupes opérant<br>sur les arbres .....                                                              | 81  |
| 6.2. Conséquences de la propriété (FA) .....                                                                                                  | 83  |
| 6.3. Exemples .....                                                                                                                           | 84  |
| 6.4. Points fixes d'un automorphisme d'un arbre .....                                                                                         | 85  |
| 6.5. Groupes ayant des points fixes (résultats auxiliaires) ..                                                                                | 89  |
| 6.6. Le cas de $SL_3(\mathbb{Z})$ .....                                                                                                       | 93  |
| CHAPITRE II - $SL_2$                                                                                                                          |     |
| § 1 - <u>L'arbre de <math>SL_2</math> sur un corps local</u> .....                                                                            | 97  |
| 1.1. L'arbre .....                                                                                                                            | 97  |
| 1.2. Les groupes $GL(V)$ et $SL(V)$ .....                                                                                                     | 103 |
| 1.3. Action de $GL(V)$ sur l'arbre de $V$ ; stabilisateurs ....                                                                               | 105 |
| 1.4. Amalgames .....                                                                                                                          | 108 |
| 1.5. Un théorème de Ihara .....                                                                                                               | 113 |
| 1.6. Un théorème de Nagao .....                                                                                                               | 117 |
| 1.7. Lien avec les systèmes de Tits .....                                                                                                     | 122 |
| § 2 - <u>Sous-groupes arithmétiques des groupes <math>GL_2</math> et <math>SL_2</math><br/>sur un corps de fonctions d'une variable</u> ..... | 130 |
| 2.1. Interprétation des sommets de $\Gamma \backslash X$ comme classes de<br>fibrés vectoriels de rang 2 sur $C$ .....                        | 131 |
| 2.2. Fibrés de rang 1 et fibrés indécomposables .....                                                                                         | 134 |
| 2.3. Structure de $\Gamma \backslash X$ .....                                                                                                 | 140 |
| 2.4. Exemples .....                                                                                                                           | 149 |
| 2.5. Structure de $\Gamma$ .....                                                                                                              | 157 |
| 2.6. Résultats auxiliaires .....                                                                                                              | 160 |
| 2.7. Structure de $\Gamma$ : cas d'un corps fini .....                                                                                        | 165 |
| 2.8. Homologie .....                                                                                                                          | 167 |
| 2.9. Caractéristiques d'Euler-Poincaré .....                                                                                                  | 174 |
| BIBLIOGRAPHIE .....                                                                                                                           | 181 |
| INDEX .....                                                                                                                                   | 185 |
| SUMMARY .....                                                                                                                                 | 188 |

## INTRODUCTION

Le point de départ de ce travail a été le théorème de Ihara [16] suivant lequel tout sous-groupe discret sans torsion  $G$  de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  est un groupe libre. Ce résultat particulièrement frappant était à l'époque (1966) le seul que l'on eut sur la structure des sous-groupes discrets des groupes  $p$ -adiques.

La démonstration de Ihara est de nature combinatoire ; elle utilise, de façon quelque peu mystérieuse, une décomposition de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  comme amalgame de deux copies de  $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ . Or, la Topologie suggère une manière naturelle de prouver qu'un groupe  $G$  est un groupe libre : il suffit de faire opérer  $G$  librement ("sans points fixes") sur un arbre  $X$  ; le groupe  $G$  s'identifie alors au groupe fondamental  $\pi_1(G \backslash X)$  du graphe quotient  $G \backslash X$ , groupe qui est évidemment libre. Interprétée de ce point de vue, la démonstration de Ihara revient à prendre pour  $X$  l'arbre associé à l'amalgame indiqué plus haut ; cet arbre, l'arbre de  $SL_2$  sur le corps  $\mathbb{Q}_p$ , apparaît alors comme un cas très particulier des immeubles de Bruhat-Tits ([37], [38]), analogues  $p$ -adiques des espaces homogènes symétriques des groupes de Lie réels.

On est ainsi amené à préciser les liens qui unissent "arbres", "amalgames" et " $SL_2$ ". C'est le sujet du présent travail, qui reprend une partie d'un cours fait au Collège de France en 1968/69 ; le reste de ce cours a été publié ailleurs ([34]).

Il y a deux Chapitres.

Le Chapitre I débute par la définition des amalgames et la structure de leurs éléments (§ 1). On passe de là aux arbres (§ 2), et plus précisément à la question suivante : que peut-on dire d'un groupe  $G$  opérant sur un arbre  $X$  lorsque l'on connaît le graphe quotient  $G \backslash X$  ainsi que les stabilisateurs  $G_x$  ( $x \in \text{som } X$ ) et  $G_y$  ( $y \in \text{ar } X$ ) des sommets et des arêtes ? On traite d'abord deux cas particuliers :

celui où  $G$  opère librement, i.e. où les  $G_x$  et les  $G_y$  sont réduits à  $\{1\}$  ; le groupe  $G$  est alors libre ; ce cas, qui est celui du théorème de Ihara, donne également une démonstration simple du théorème de Schreier disant que tout sous-groupe d'un groupe libre est libre (§ 3) ;

celui où le graphe  $G \backslash X$  est un segment  $x \xrightarrow{y} x'$ , auquel cas  $G$  s'identifie à l'amalgame  $G_x *_{G_y} G_{x'}$  ; de plus, tout amalgame de deux groupes s'obtient ainsi, et de façon unique ; on obtient un dictionnaire commode entre "amalgames" et "groupes agissant sur un arbre avec pour domaine fondamental un segment" (§ 4).

Le cas général fait l'objet du § 5. Dans le cours oral, je m'étais borné à en suggérer la possibilité, sans faire aucune vérification. La forme définitive des définitions et des théorèmes, ainsi que les démonstrations, sont dues à H. Bass. Le résultat principal dit, en gros, que l'on peut reconstituer  $G$  à partir de  $G \backslash X$  et des stabilisateurs  $G_x$  et  $G_y$  : c'est le "groupe fondamental" d'un "graphe de groupes" porté par  $G \backslash X$  ; inversement, tout graphe de groupes s'obtient ainsi, de façon essentiellement unique. Ici encore, on dispose d'une "forme normale" pour les éléments de  $G$ . Le cas où  $G \backslash X$  est un lacet  conduit aux groupes "de type (HNN)".

Le § 6 étudie les relations entre "amalgames" et "points fixes". Il montre que certains groupes, tels  $SL_3(\mathbb{Z})$ ,  $Sp_4(\mathbb{Z})$ , etc, ont toujours des points fixes, lorsqu'ils opèrent sur des arbres ; cela prouve que ce ne sont pas des amalgames. Une première version de ces résultats a été publiée ailleurs (Lect. Notes in Math. n° 372, Springer-Verlag, 1974, p. 633-640).

Le Chapitre II commence par la définition et les principales propriétés de l'arbre  $X$  attaché à un espace vectoriel  $V$  de dimension 2 sur un corps local  $K$  (§ 1). Les sommets de cet arbre sont les classes de réseaux de  $V$ , deux réseaux étant dans la même classe s'ils sont homothétiques, i.e. s'ils ont le même stabilisateur dans  $GL(V)$  ; deux sommets sont liés si on peut les représenter par des réseaux emboîtés dont le quotient est de longueur 1 ; on reconnaît là la notion de "réseaux voisins" qui intervient dans la définition classique de l'opérateur